



DIE LEHRE

VON DEN

SCHWINGUNGSCURVEN.

NACH

FREMDEN UND EIGENEN UNTERSUCHUNGEN

DARGESTELLT

VON

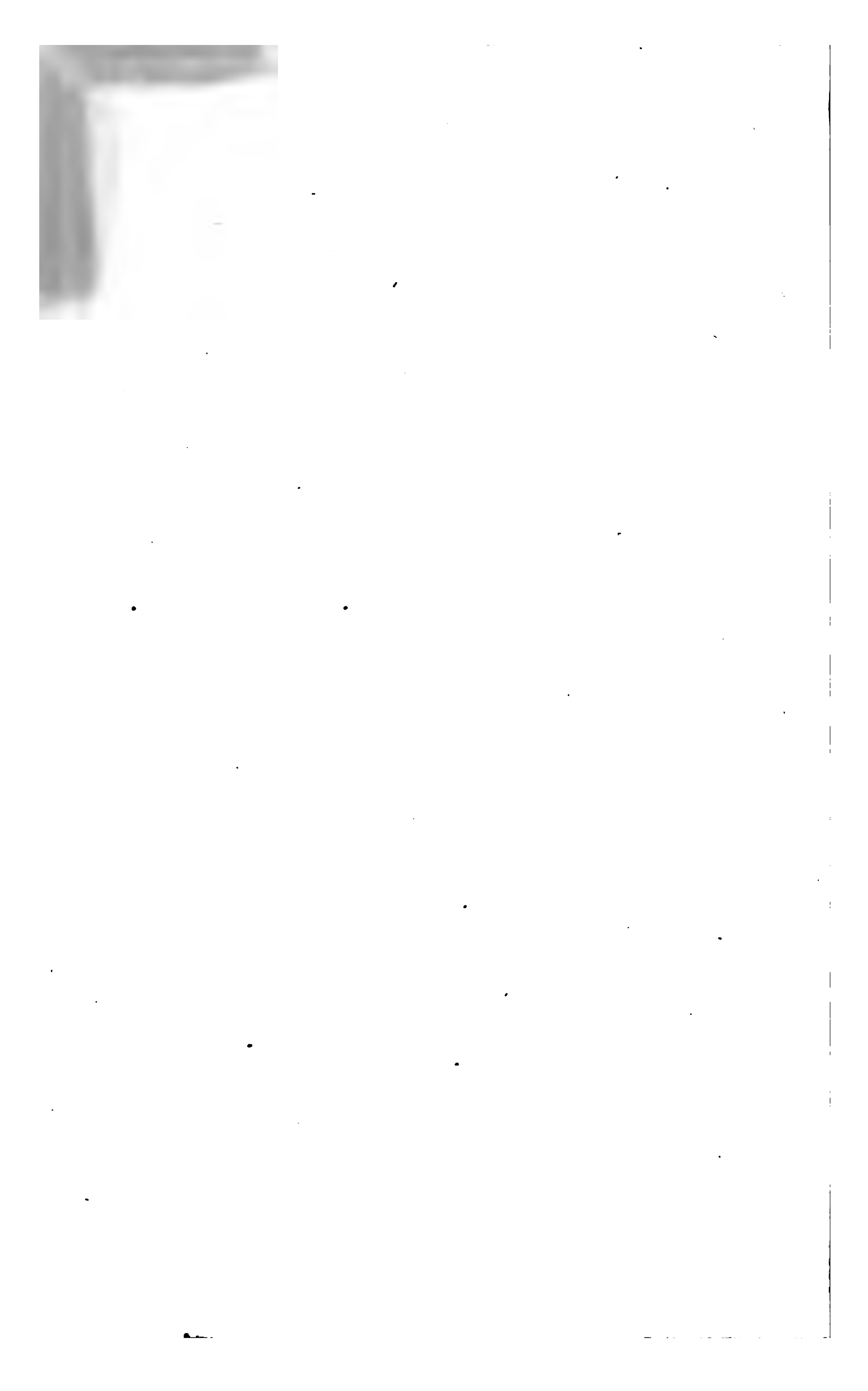
DR. FRANZ MELDE,

PRIVATDOCENT A. D. UNIVERSITÄT MARBURG.

MIT EINEM ATLAS VON 11 TAFELN IN STEINDRUCK.

LEIPZIG, 1864.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.



Vorrede.

In gegenwärtiger Schrift habe ich es versucht, eine Reihe von Resultaten, welche theils schon von Andern und mir veröffentlicht wurden, theils von meiner Seite jetzt als neu hinzukommen, im Zusammenhange so darzustellen, dass ein specieller Zweig der Wellenlehre und Akustik hierdurch zu allgemeinerer und genauerer Kenntnis gelange. Wiewohl ich meinen Antheil an der Bearbeitung dieses Gegenstandes in der Einleitung schon im Allgemeinen angedeutet habe, so darf ich ihn hier wohl noch specieller bezeichnen.

Es gehört hier her: der §. 3; das dritte und vierte Capitel; das sechste Capitel; der §. 24 und 26; das neunte Capitel; der §. 30 grösstentheils, sowie theilweise der §. 31; dann das eilfte Capitel, so weit es sich eben um allgemeinere Resultate darin handelt. Da, wo fremde Untersuchungen vorlagen, habe ich sie fast nie unmittelbar und in unveränderter Form benutzt, sondern mich stets bestrebt, von strengeren Gesichtspunkten auszugehen. Es gilt dies von verschiedenen Stellen des ersten Theils und beinahe vollständig von dem zweiten Theile.

Was die Anfertigung der Tafeln V bis XI anlangt, so muss ich diesen Theil der Arbeit als den mühevollsten bezeichnen, und er hat längere Zeit meine Thätigkeit in Anspruch genom-

men, da mancher Versuch misslang. Die Darstellung der Lithographien nach meinen Originalen ist jedoch der geschickten Hand des Künstlers in vollendeter Weise gelungen, nur hätte ich die Curven lieber weiss auf schwarz als wie umgekehrt ausgeführt gesehen.

Einzelne Figuren, wie die Figur 41 und 42 auf Tafel III und 49 auf Tafel IV, habe ich mir aus dem neuesten Werk von HELMHOLTZ über die Tonempfindungen und aus der neuen Auflage von MÜLLER's Physik nachzuzeichnen erlaubt. Leid thut es mir, gerade was diese Figuren anlangt, dass ich nicht noch von anderen Zeichnungen habe Gebrauch machen können, welche mir Herr Mechanikus RUD. KOENIG von Paris freundlichst, jedoch nach Vollendung der vier ersten Figurentafeln, übersandte.

Marburg, am 12ten October 1863.

F. Melde.

Inhaltsübersicht.

[Die von dem Verfasser angewandten kürzern Bezeichnungen sind mit Angabe der Seitenzahl in Klammern beigefügt worden.]

Seite.

Drittes Capitel.

Optisch-mechanische und graphische Darstellung derjenigen Schwingungscurven, welche durch das Zusammenwirken einer geradlinigen und einer elliptischen Vibrationsbewegung erzeugt werden.

Viertes Capitel.

Optisch-mechanische und graphische Darstellung derjenigen Schwingungscurven, welche durch das Zusammenwirken zweier elliptischen Vibrationsbewegungen erzeugt werden.

Fünftes Capitel.

Weitere Methoden der Darstellung und Beobachtung von Schwingungscurven, sowie Nutzanwendungen von letzteren.

Sechstes Capitel.

Ueber Schwingungsflächen im Allgemeinen und ins Besondere bei fadenförmigen Körpern.

Zweiter Theil.

Siebentes Capitel.

Aufstellung der allgemeinen und besondern Gleichungen unserer Schwingungscurven. Begriffsbestimmung ihrer Lage und Form.

Achtes Capitel.

Allgemeine Theorie der Schwingungscurven, welche durch zwei geradlinige Componenten erzeugt werden, insofern hierbei allein die Grösse ϑ von Einfluss ist.

Neuntes Capitel.

Allgemeine Theorie der Schwingungscurven, welche durch eine geradlinige und eine elliptische oder auch zwei elliptische Componenten erzeugt werden.

Zehntes Capitel.

Besondere Eigenschaften der Schwingungscurven.

Eilftes Capitel.

Theorie der optisch-akustischen Wellenapparate in ihrem Zusammenhange mit den Schwingungscurven.

DIE LEHRE

VON DEN

SCHWINGUNGSCURVEN.

Berichtigungen.

Seite 34. Zeile 4 v. o. lies: $\mu\mu,$ statt $\mu\mu,$.

S. 41. Z. 3 v. u. lies: $p-q\frac{m}{n}$ st. $p-q\frac{n}{m}$.

S. 43. Z. 7 v. o. lies: negative ganze Zahl st. negative Zahl.

S. 44. Z. 11 v. o. schalte hinter »$\frac{L}{m.82}$. z. B.« ein die Worte: für $m = 4$.

S. 46. Z. 13 v. o. lies: ist das Verdienst st. das ist das Verdienst.

S. 76. Z. 5 v. u. lies: verfuhr st. verführt.

S. 87. Z. 7 v. u. lies: Glasplatte oben st. Glasplatte aber.

S. 102. Z. 1 v. u. schalte hinter: »oben« ein: §. 16, 7.

S. 107. Z. 12. v. u. lies: $A_2 \sin 2m_2\pi(t+\vartheta_2) \cos \varphi_2$ st. $A_2 \sin 2m_1\pi(t+\vartheta_2) \cos \varphi_2$.

S. 127. Z. 20 v. o. lies: dritten Lage st. zweiten Lage.

S. 129, 130 und 131 setzte in den Gleichungen (1) bis (13) und dem dazwischen liegenden Texte ε_1 st. $\varepsilon,$.

S. 134. Z. 11 v. u. lies: $(-1)^x-(-1)^\lambda=0$ st. $(-1)^x-(-1)=0$.

S. 151. Z. 11 v. u. lies: Grade st. Gerade.

S. 162. Z. 1 v. u. lies: $n = 5$ und $m = 1$ st. $n = 5$ und $n = 1$.

S. 165. Z. 3 v. o. lies: Curve st. Curven.

S. 176. Z. 1 v. u. lies: $\Theta_{t+\tau}$ st. Θ_{t+}.

S. 180. Z. 10 v. o. lies: $\pm\frac{p}{2Tn}$ st. $\mu = \pm\frac{p}{2Tn}$.

S. 180. Z. 16 v. o. lies: $\pm\frac{1}{2.25.2}$ st. $\mu = \pm\frac{1}{2.25.2}$.

S. 186. Z. 4 v. u. lies: anderen st. andere.

Einleitung.

1. Die von THOMAS YOUNG im Jahre 1800 veröffentlichten*) »Untersuchungen über Schall und Licht« enthalten unter anderen auch einen Abschnitt über die Schwingungen der Saiten, worin eine Methode angegeben wird, deren man sich bedienen könnte, um die Bahnen, welche die Punkte einer schwingenden Saite beschreiben, sichtbar zu machen. Das Wesen dieser Methode bezeichnet der genannte Physiker in folgenden Worten; »Man nehme eine von den tiefsten Saiten eines Pianoforte's, die mit feinem Silberdrahte besponnen ist, lasse das Licht durch eine enge Oeffnung des Fensterladens darauf fallen, so dass, wenn das Auge in gehöriger Lage gehalten wird, der Lichtschein schmal, glänzend und bestimmt an jeder der Windungen des Drahtes erscheine. Sodann lasse man sie schwingen, so wird der Lichtpunkt seinen Weg bezeichnen, wie eine schnell im Kreise geschwungene glühende Kohle, und dem Auge eine Lichtlinie darstellen, welche durch Hilfe des Microscops sehr genau beobachtet werden kann. Nach der verschiedenen Art nun, wie der Draht in Bewegung gesetzt wird, ist die Form dieses Weges nicht minder mannigfaltig und unterhaltend, wie die, von CHLADNI entdeckten, Figuren der Knotenlinien schwingender Scheiben. Jene Erscheinung ist in der That in einer Rücksicht noch interessanter,

*) Philosoph. Transact. of the Roy. Soc. of London for the year 1800. p. 106 f.; weiterhin Gilberts Annalen Bd. 22. p. 249 und 337; speciell: p. 365.

indem sie mehr für mathematische Bestimmung geeignet zu sein scheint.« Eine Reihe von Curven, die auf diese Weise beobachtet wurden, hat YOUNG bildlich mitgetheilt und in Worten beschrieben, aus welcher Darstellung sich jedoch erkennen lässt, dass er den eigentlichen Zusammenhang zwischen den Formen dieser Figuren und deren Abhängigkeit von der Erregungsart der Saite nicht zum Gegenstande eines genaueren Studiums gemacht hatte.

2. Im Jahre 1827 suchte WHEATSTONE auf andere Weise Schwingungscurven sichtbar zu machen, und wurde hierdurch der Erfinder des Kaleidophons, eines Instrumentes, das seit jener Zeit wohl nur selten unter den Apparaten eines physikalischen Cabinets fehlen dürfte. Dieses Instrument hat den Zweck, die Bahnen sichtbar zu machen, welche die Punkte der grössten Ausbiegung schwingender Stäbe beschreiben und welche meistens durch die Combination mehrerer, in einem und demselben Stabe gleichzeitig auftretender Schwingungsarten die mannigfaltigsten und zierlichsten Gestalten annehmen. Dieser Zweck wird erreicht, wenn man die Bahnen durch einen hell glänzenden Punkt beschreiben lässt, und die Stäbe so lang wählt, dass ihre Schwingungsdauer geringer ist, als die Dauer der Gesichtseindrücke.

Der Beziehungen wegen, in welcher das Kaleidophon WHEATSTONE's zu später zu beschreibenden Apparaten steht, möge die Beschreibung desselben der Originalabhandlung*) gemäss hier folgen. Auf einem kreisrunden, ungefähr 9 Zoll im Durchmesser haltenden Brete, Fig. 1, Taf. I sind drei, etwa einen Fuss lange Stahlstäbe befestigt. Der erste Stab *a* ist cylindrisch, ungefähr $^1/_{10}$ Zoll dick und am Ende mit einem Knöpfchen versehen, welches das auf ihn fallende Licht reflectirt. Der zweite Stab *b* ist dem ersten ähnlich und trägt auf seinem Ende eine Platte, die in einem Scharniere beweglich ist, so dass sie sich wagerecht, schief und senkrecht stellen lässt. Diese Platte dient zur Aufnahme verschiedenartig gefärbter Knöpfchen, die auf einem Stücke schwarzer Pappe symmetrisch befestigt sind. Der dritte Stab *c* ist ein viersei-

*) Journ. of Science New. Ser. Vol. I. p. 344. und Pogg. Annal. Bd. 86 (X) p. 470.

tiges Prisma und am Ende mit ebensolcher Platte zur Aufnahme ähnlicher Gegenstände versehen. Endlich ist noch ein vierter Stab *d* in der Mitte des Bretes befestigt; er ist rechtwinklig gebogen und, wie der erste Stab, mit einem Knöpfchen versehen. Nahe an seinem untern Ende trägt er eine Schraubenmutter, um mittelst dieser einen Druck auf das Bret auszuüben und so die Steifigkeit des Stabes innerhalb gewisser Grenzen zu ändern. In gleicher Weise kann man die untern Enden der drei ersten Stäbe einrichten. Ein Hammer, der durch einen Ueberzug von Leder weich gemacht ist, wird zum Schlagen der Stäbe benutzt und, um die Wirkungen etwas mannigfaltiger zu machen, ist noch ein Violinbogen erforderlich. Die Hülfe eines Microscops zur Beobachtung der Schwingungscurven, welche sich mittelst dieses Apparates darstellen lassen, ist nicht nöthig, da man die Stäbe mit hinlänglich grossen Excursionsweiten in Schwingung versetzen kann.

3. Gleichwie Young hat sich auch Wheatstone damit begnügt, eine Reihe von Curven bildlich darzustellen und einzelnen Formen derselben eine nähere Beschreibung zu widmen. Die Anwendung des Calculs, sowie die weitere Verfolgung der Experimente ist von ihm nicht versucht worden und so kam es denn, dass man diesen mannigfaltigen und zierlichen Erscheinungen, welche sich mit Hülfe des Kaleidophons darstellen lassen, lange Zeit mehr ein unterhaltendes, wie wissenschaftliches und praktisches Interesse zurechnete.

Erst im Jahre 1857 wurde auf diese Gegenstände von Neuem die Aufmerksamkeit der Physiker hingelenkt durch eine Arbeit, welche der französische Physiker Lissajous zunächst in einzelnen Notizen in den Comptes rendus und hierauf als Gesammtabhandlung in den Annal. de chim. et de phys. 3me Sér. Tome LI. p. 147 unter dem Titel: »*Sur l'Etude optique des Mouvements vibratoires*« veröffentlichte. Eine eigenthümliche Methode, deren Wesen wir erst später einer genaueren Betrachtung zu würdigen haben, die wir jedoch vorläufig als in einer geeigneten Zusammenstellung zweier Stimmgabeln, unter Anwendung optischer Hülfsmittel, der Hauptsache nach bestehend, bezeichnen können, setzte den genannten Physiker in den Stand, eine Gruppe von Schwingungscurven darzustellen, deren nähere Betrachtung zu folgenden schönen Resultaten führte:

Man ist aus dem Anblicke einer Schwingungscurve, also mit Hilfe des Auges, im Stande, das Intervall zu erkennen, welches zwei tönende Stimmgabeln mit einander bilden. —

Dieser Anblick gestattet sogar, die in einem bestimmten Momente zwischen den beiden Stimmgabeln bestehende Phasendifferenz zu erkennen; ein Umstand, der sich mit Hilfe des Ohrs niemals erkennen lässt. —

Die Dimensionen dieser Curven, nach zweien zu einander senkrechten Richtungen, lassen Schlüsse zu über die relative Intensität der beiden Stimmgabeln. —

Diese Curven geben ein neues, scharfes und leichtes Mittel ab zur Bestimmung der absoluten Zahl der Schwingungen einer Stimmgabel. —

Die genauere Beobachtung ihrer Formen führt zur Aufklärung bei einer Reihe akustischer, optischer und wohl noch anderer physikalischer Fragen; überhaupt können sie eine nützliche Controle abgeben bei manchen Problemen, wo das Ohr als Schiedsrichter allein nicht ausreicht, wie ja das Erkennen der Phasendifferenz schon hinlänglich beweist. —

4. Diese Umstände bewogen mich, die Arbeit Lissajous' in ihren Einzelheiten zu verfolgen, und mich längere Zeit mit diesem Theil der Akustik zu befassen. Zunächst war es mein Bestreben, eine Methode zu erfinden, nach welcher sich die Schwingungscurven in leichterer und allgemeinerer Weise darstellen und beobachten lassen, als bei der Lissajous'schen der Fall ist: eine Methode, bei welcher die Principien Lissajous' mit der Einfachheit eines Wheatstone'schen Kaleidophons verbunden wurden. Lissajous hat sich darauf beschränkt, zunächst den Fall zu berücksichtigen, in welchem zwei geradlinige Vibrationsbewegungen entweder so mit einander verbunden werden, dass sie in eine und dieselbe Gerade fallen, oder so, dass sie unter einem rechten Winkel gegen einander geneigt sind. Meine Methode dagegen gestattet vorläufig:

Erstens: zwei (oder auch mehrere) geradlinige Vibrationsbewegungen unter einem beliebigen Winkel,

Zweitens: speciell eine elliptische und eine geradlinige und

Drittens: zwei elliptische Vibrationsbewegungen mit einander zu combiniren.

5. Die genauere Betrachtung der gezeichneten Curven, welche Young und Wheatstone ihren Abhandlungen beigegeben haben, beweist, dass diese Zeichnungen so entworfen wurden, wie es eben nach öfterem Anblick das Gedächtnis vermochte, dass dagegen nicht bestimmte geometrische Sätze und praktische Kunstgriffe zur Anwendung kamen. Da diese Zeichnungsmethode der Raschheit wegen, mit welcher sich die Erscheinungen vor den Augen des Beobachters entwickeln, eine unsichere ist, da ferner von der genauen graphischen Darstellung der Schwingungscurven ein grosser Theil ihrer Nutzanwendungen allein abhängt, so ist es als ein weiteres Verdienst Lissajous' anzusehen, dass er auch auf diesen Theil seiner Untersuchung besondere Aufmerksamkeit verwandte. Dem Umstande entsprechend, dass in gegenwärtiger Schrift neben der Lissajous'schen noch eine Reihe anderer Gruppen von Schwingungscurven zur nähern Kenntnis gebracht sind, mussten auch deren Zeichnungsmethoden eine weitere genauere Darstellung in Wort und Bild erfahren.

6. Besonders hat es sich der Verfasser gegenwärtiger Schrift angelegen sein lassen, die Anwendung des Calculs auf die einzelnen Curvengattungen von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus darzustellen, als es bei Lissajous der Fall ist. In einzelnen Punkten musste die Lissajous'sche Theorie speciell berichtigt werden. Unter den näheren Specialitäten der Curven sind jedoch nur ihre allgemeinen Formverhältnisse, sowie die Maxima und Minima derselben berücksichtigt worden, da diese vorzugsweise im Zusammenhang mit manchen akustischen Fragen stehen. Der Mathematiker, der diese interessanten Curven zu einer weiteren Untersuchung wählen sollte, wird reichen Stoff der Bearbeitung finden. Auch die Beziehungen der Sinuslinie zu einzelnen Curvengattungen wurden speciell berücksichtigt, um hierdurch einzelne, von Lissajous mitgetheilte Resultate zu verallgemeinern, welche sich auf den Zusammenhang seiner Curven mit der Cylinderfläche beziehen. Fernerhin ist nicht versäumt worden, die Theorie der akusti-

schen und optischen Wellenapparate in ihrem Zusammenhang mit der Theorie der Schwingungscurven zu zeigen. Desgleichen lag es in der Absicht des Verfassers zu untersuchen, welcher Ausbildung die Methode YOUNG's, die Schwingungscurven darzustellen, fähig ist. In dieser Beziehung wurden, bereits früher vom Verfasser veröffentlichte, Untersuchungen von Neuem besprochen, zugleich mit besonderer Rücksicht auf Schwingungsflächen bei fadenförmigen Körpern.

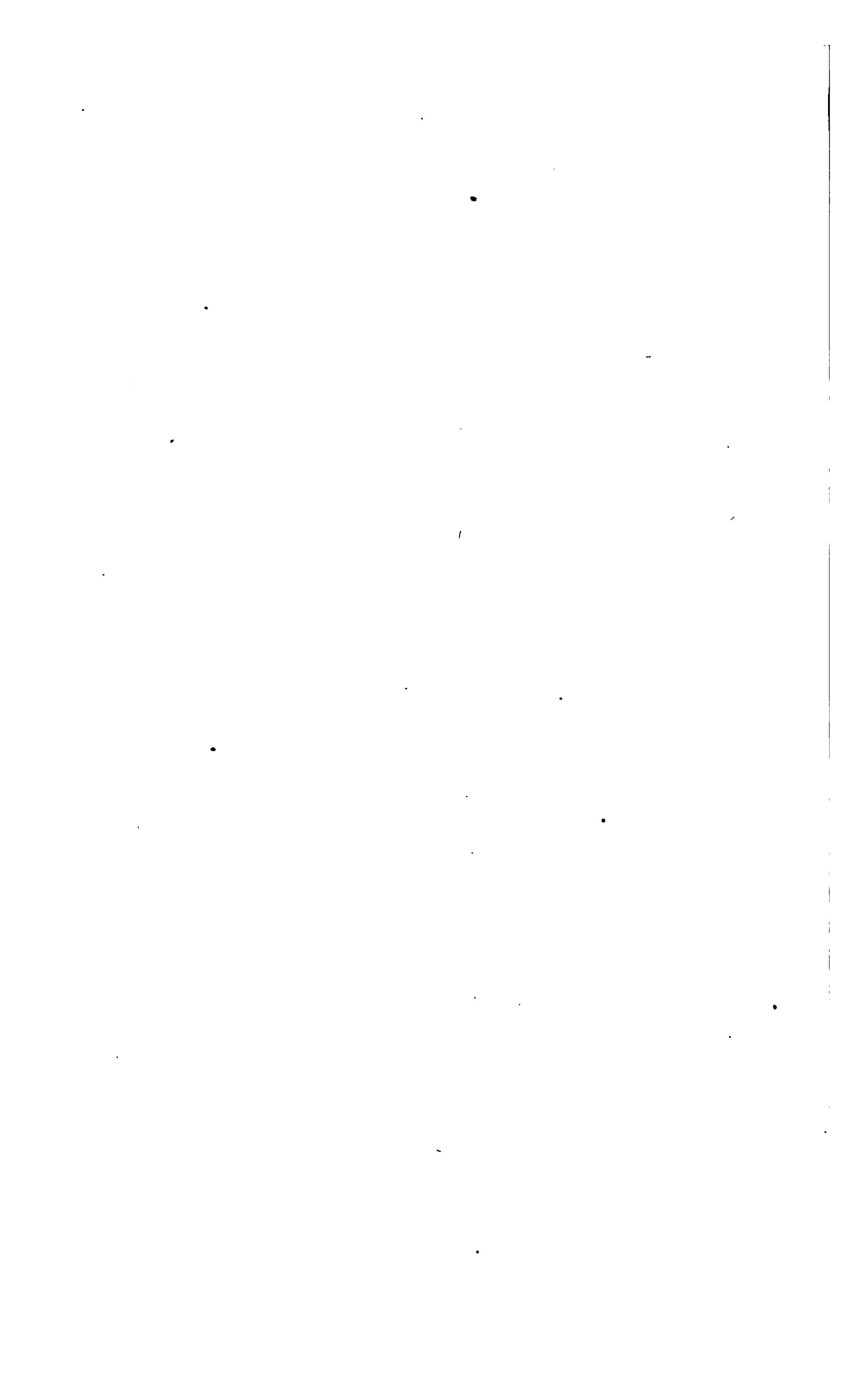
7. Den gesammten Stoff gegenwärtiger Untersuchung hat der Verfasser in zwei Theile gespalten: der erste Theil enthält die optisch-mechanische und graphische Darstellung der Schwingungscurven; ferner ihre physikalischen und geometrischen Eigenschaften, sowie ihre Nutzanwendungen, insoweit, als hierbei die Rechnung füglich vermieden werden kann. Der zweite Theil dagegen enthält die Theorie der Schwingungscurven im Allgemeinen, sowie mit Rücksicht auf einzelne besondere Eigenschaften und Nutzanwendungen derselben; ferner die Theorie der optischen und akustischen Wellenapparate, insofern eben hiermit die Schwingungscurven im Zusammenhang stehen.

Erster Theil.

Optisch-mechanische und graphische Darstellung

der

Schwingungscurven.



Erstes Capitel.

Optisch-mechanische Darstellung derjenigen Schwingungscurven, welche durch das Zusammenwirken zweier (oder mehrerer) geradliniger Vibrationsbewegungen erzeugt werden.

§. 1.

Die Grundsätze der Darstellung von Schwingungscurven mittelst zweier Planspiegel.

1. In Fig. 2, Taf. I stelle M ein Planspiegelchen vor, welches von einem, in der Richtung Lm ankommenden, möglichst schmalen Lichtbündel so getroffen wird, dass es letzteres in der Richtung des angedeuteten Pfeils reflectirt. Wird diesem reflectirten Lichtbündel in einiger Entfernung von dem Spiegel ein Schirm S entgegengestellt, so bietet sich dem Auge des Beobachters auf diesem in dem Punkte s das Bild eines leuchtenden Punktes dar, dessen Helligkeit und Schärfe der Begrenzung einmal abhängt von der Beschaffenheit des ursprünglichen Lichtbündels Lm und der Spiegelungsfähigkeit von M, andererseits auch von der Beschaffenheit des Schirmes S und des Raumes, in welchem die ganze Operation vorgenommen wird. Nehmen wir an, dem Spiegel M werde in willkürlicher Weise eine Bewegung ertheilt, jedoch so, dass er hierbei stets noch von dem Strahl Lm getroffen bleibt, so gehen folgende Veränderungen vor sich. Erstens: verändert der Punkt m auf dem Spiegel M seine Lage, zweitens: ändert sich

hiermit die Richtung des reflectirten Lichtstrahls, drittens: verliert der Punkt s seine ursprüngliche Lage, und beschreibt auf dem Schirm eine Bahn, deren Form in genauem Zusammenhange steht mit der Bewegung von M. Ein Beobachter des Schirms wird hierbei den leuchtenden Punkt s verfolgen können, ja er wird die Bahn, welche er beschreibt, in ihrer Continuität ganz als eine leuchtende Curve erblicken, falls die Bewegung in einer Zeit vorgenommen wird, die kürzer ist, als die Dauer des Gesichtseindrucks.

Die Curven, welche so in objectiver Weise auf dem Schirme entworfen werden, liessen sich ebenso leicht auch subjectiv beobachten: Zu dem Ende hat der Beobachter nur nöthig, direct in den Spiegel M hinein zu schauen und für den Fall, dass die Bewegungen des letztern zu gering wären, mit einem Fernrohre oder Microscope das beobachtende Auge zu bewaffnen.

2. Von den verschiedenen willkürlichen Bewegungen, welche dem Spiegelchen M mitgetheilt werden können, wollen wir jedoch nur eine genau charakterisiren, insofern diese allein für die nächste Folge in Betracht zu ziehen ist. Zu dem Ende denken wir uns, die Ebenen von M und S seien vertical, und legen in Gedanken durch den Punkt m in der Ebene des Spiegels eine horizontale Gerade, welche bei der Bewegung desselben die Rolle einer festen Drehungsaxe spielen soll. Bezeichnen wir diese Drehungsaxe kurz mit H, so würde weiterhin eine, durch m und senkrecht zu H gelegte Ebene E bei gehöriger Erweiterung den Schirm S in einer verticalen Geraden durchschneiden, welche vv, heissen soll. Ist die Einrichtung nun so getroffen, dass der ursprüngliche Lichtstrahl Lm in der Ebene E einfällt, so leuchtet ein, dass bei einer Drehung des Spiegels um H die Reflexionsebene beständig identisch bleibt mit der Ebene E, dass mithin bei dieser bestimmten Anordnung des Apparats und dieser, nunmehr bestimmt charakterisirten, Bewegung des Spiegels, der leuchtende Punkt s auf dem Schirme sich auf der verticalen Geraden vv, bewegen muss. Bei hinlänglich rascher Drehung des Spiegels würde demnach bei objectiver Beschauung das Auge eine verticale leuchtende Gerade erblicken.

3. Geschieht die Drehung des Spiegels nicht um die Axe

$H_{,}$ sondern um eine hierzu parallele, jedoch immer noch in der Ebene von M gelegene Axe $H_{,,}$ deren Durchschnitt mit E durch $m_{,}$ bezeichnet werde, so leuchtet ein, dass auch bei dieser Bewegung des Spiegels, falls nur alle übrigen Bedingungen erfüllt bleiben, der Punkt s sich noch auf der Geraden $vv_{,}$ bewegt, dass mithin der Beobachter des Schirms bei allen Stellungen des Auges eine verticale leuchtende Gerade erblickt. Es entsteht aber die Frage, ob dies noch dann gilt, wenn der Beobachter direct in den Spiegel hineinsieht, oder ob bei dieser subjectiven Betrachtung die Erscheinungen mit der Stellung des Auges sich ändern, und so dies der Fall wäre, wie man zu verfahren hat, um die, bei der subjectiven und objectiven Beobachtung auftretenden Unterschiede möglichst wegzuschaffen. Die Lösung dieser Frage wird die Momente in sich enthalten, welche zu beachten wären, wenn auch bei der unter 2. betrachteten Drehung, die Unterschiede der objectiven und subjectiven Beobachtung fast ganz verschwinden sollten.

Zur Erläuterung der Erscheinungen, welche bei der genannten Frage in Betracht kommen, diene Fig. 3, Taf. I. Die Ebene dieser Figur stellt zugleich die Ebene E oder die Reflexionsebene vor, auf welcher in $m_{,}$ die Drehungsaxe $H_{,}$ und in M der Spiegel projicirt erscheint. Um den Punkt $m_{,}$ ist ein Kreisbogen beschrieben, der zugleich durch den Punkt L als den Ort der Lichtquelle geht, so dass das Bild von L nach σ hin zu liegen kommt. Wird nun der Spiegel M um den Winkel $\omega m_{,}\omega_{,}$ aus seiner Ruhelage herausgedreht, so beschreibt hierbei das Bild σ den Kreisbogen $\sigma\sigma_{,}$ gleich dem doppelten Bogen $\omega\omega_{,,}$ und es leuchtet ein, dass der in den Spiegel sehende Beobachter den Bogen $\sigma\sigma_{,}$ nur dann als eine verticale Gerade erblickt, wenn sich dessen beobachtendes Auge in der Reflexionsebene befindet. Setzen wir kleine Drehungswinkel voraus, so können wir den Bogen $\sigma\sigma_{,}$ als eine Gerade ansehen. Die scheinbare Länge dieser Geraden ändert sich dann, jenachdem der Beobachter sein Auge in der Reflexionsebene bewegt; sie kann selbst auf einen Punkt reducirt erscheinen, wenn das Auge in der Richtung $\sigma\sigma_{,}$ noch in den Spiegel hinein sehen kann. Hebt sich aber das Auge aus der Ebene E heraus, so verliert die Gerade $\sigma\sigma_{,}$ auch den Charakter einer Verticallinie, und scheint mit der Verticalen einen Winkel zu bilden, der je

nach der Stellung des Auges sich ändert und, falls nur der Spiegel gross genug ist, von 0^0 bis 180^0 wachsen kann*).

Rücken wir die Lichtquelle von L nach $L_{,}$, so erscheint ihr Bild in σ' und beschreibt bei der Drehung des Spiegels den Bogen $\sigma'\sigma_{,}'$, den wir wiederum als eine Gerade ansehen können. Es bedarf einer geringen Ueberlegung, um sich zu überzeugen, dass Unterschiede, welche bei der ersten Lichtquelle stattfanden und merklich hervortraten, sobald sich das beobachtende Auge aus der Ebene E herausbewegte, bei dieser zweiten Stellung in weit geringerem Grade sich bemerklich machen: dass nämlich bei sehr verschiedenen Stellungen des Auges die Gerade $\sigma'\sigma_{,}'$ nicht nur nahezu dieselbe Grösse behält, sondern auch nicht merklich von der Verticalen abzuweichen scheint. Es leuchtet ein, dass dieses in noch höherem Grade der Fall sein würde, wenn wir die Lichtquelle nach $L_{,,}$ rückten. Sollen also bei dieser Bewegung des Spiegels die Unterschiede der objectiven und subjectiven Beobachtung möglichst ausgeglichen werden, soll auch bei der letztern das Auge bei den verschiedensten Stellungen eine verticale leuchtende Gerade erblicken, so hat man für den Fall, dass man subjectiv beobachten will, die Anordnung des Apparats so zu treffen, dass der Winkel $Lm_{,}\omega$ nahezu ein rechter wird, und ausserdem, wie leicht begreiflich, die Lichtquelle möglichst weit vom Spiegel entfernt zu liegen kommt.

4. Die Experimente, welche durch das Vorhergehende der

---

*) Von der Richtigkeit dieser Erscheinung kann man sich leicht durch ein in schräger Stellung vor einen Spiegel gehaltenes Stäbchen und die Beobachtung seines Bildes bei verschiedenen Stellungen des Auges überzeugen. Lissajous bemerkt in Betreff dieser Erscheinung (Abhandlung S. 153) Folgendes: »*Cette ligne* ($\sigma\sigma_{,}$) *paraîtra verticale si on regarde dans le plan E; mais si l'oeil est placé en dehors de ce plan, à mesure que l'oeil s'enécarte, la ligne paraît de plus en plus inclinée. Neanmoins cette inclinaison apparente ne peut pas être plus grande que l'inclinaison réelle de la droite par rapport à la verticale.*« Eine in unserer Fig. 3 durch σ mit $\omega m_{,}$ parallel gelegte Gerade entspricht der Verticalen und es würde der letzte Satz Lissajous' so viel heissen, als könne die scheinbare Neigung von $\sigma\sigma_{,}$ im Maximo nur gleich dem bei σ gebildeten Winkel werden. Dass dem jedoch nicht so ist, dass im Gegentheil der Winkel der scheinbaren Neigung die Grenze 180^0 erreichen kann, beweist, wie gesagt, das angedeutete einfache Experiment.

Hauptsache nach erläutert worden sind, gestatten eine bemerkenswerthe Erweiterung. Setzen wir nämlich voraus, der von *M* reflectirte Lichtstrahl werde nicht unmittelbar von dem Schirme *S* aufgefangen, sondern erst nach einer zweiten, an dem Spiegel *N* Fig. 4, Taf. I erfolgten Reflexion, so ist ersichtlich, dass eine einzige Bewegung eines Spiegels, wie auch eine gemeinsame Bewegung der beiden Spiegel eine Aenderung der Lage des Punktes *s* nach sich zieht, dass die von dem Punkt *s* auf dem Schirme beschriebene Curve ihrer Form nach in genauem Zusammenhang steht mit der Bewegung jedes einzelnen Spiegels. In specieller Rücksicht auf das Folgende wollen wir eine bestimmte Anordnung des ganzen Apparats und zwei bestimmte Bewegungsarten der beiden Spiegel genauer bezeichnen. Was die Anordnung des Apparats betrifft, so möge erstens vorausgesetzt werden, dass die Ebenen der beiden Spiegel und des Schirmes vertical und unter sich parallel, zweitens, dass der Lichtstrahl *Lm* sehr nahe normal den Spiegel *M* treffe, wodurch auch der Strahl *mn* dieselbe Eigenschaft bezüglich des Spiegels *N* erlangt. Dies vorausgesetzt, wollen wir uns durch den Punkt *m* in der Ebene von *M* und durch den Punkt *n* in der Ebene von *N* zwei horizontale Geraden *H* und *H'* gelegt denken und diese bei der zunächst in Betracht kommenden Bewegung der Spiegel als feste Drehungsaxen betrachten, ferner durch die Punkte *m* und *n* senkrecht zu den beiden Drehungsaxen eine Ebene *E* gelegt denken und ihren verticalen Durchschnitt mit *S* wiederum durch *vv*, bezeichnen.

Was die Erläuterung der objectiven Erscheinungen bei einer gemeinsamen Drehung der Spiegel um die Axen *H* und *H'* betrifft, so werden wir von der Wahrheit nur um ein Geringes abweichen, wenn wir die Strahlen *Lm*, *mn* und *ns* als in ein und dieselbe, in der Ebene *E* gelegene, Gerade zusammenfallend betrachten, und die Vorgänge, wie sie in dieser Ebene stattfinden, uns klar zu machen suchen.

5. In Fig. 5, Taf. I soll die Ebene des Papiers die Ebene *E* vorstellen; der von *L* auf den Spiegel *M* gelangende Lichtstrahl *Lm* wird in der Richtung *mn* auf den Spiegel *N* geworfen, von hier in der Richtung *ns* reflectirt, um auf der Geraden *vv*, einen leuchtenden Punkt *s* zu bezeichnen. Würde nun der Spiegel *M* allein in der Richtung des angehängten

Pfeils um einen Winkel α aus der Ruhelage herausgedreht, so würde der ursprüngliche Lichtstrahl Lm nicht in der Richtung mn nach dem ruhenden Spiegel N hin reflectirt, sondern in einer Richtung mg, so dass der Winkel gmn gleich 2α, um von g aus in der Richtung $g1$ zum zweiten Male reflectirt zu werden, und auf der Geraden vv, einen leuchtenden Punkt 1 zu bezeichnen. Denken wir im Punkte g die Normale gh errichtet, so hat, bei der angegebenen Drehung, der Punkt s auf der Geraden vv, eine Strecke:

$$s1 = sh + h1$$

durchlaufen, deren Grösse wir leicht analytisch ausdrücken können. Die Entfernung der beiden Spiegel mit e, sowie die Entfernung der Geraden vv, von N mit f bezeichnet, ergiebt sich nämlich:

$$sh = e.\ \text{tang}\ 2\alpha$$
$$h1 = f.\ \text{tang}\ 2\alpha$$

mithin:

$$s1 = (e+f)\ \text{tang}\ 2\alpha.$$

Würde der Spiegel N allein bei ruhendem Spiegel M in der Richtung des angehängten Pfeils um einen Winkel β aus der Ruhelage herausgedreht, so würde der in der Richtung Lm ankommende und nach mn hin reflectirte Lichtstrahl von N nicht nach ns, sondern nach $n2$ hin reflectirt werden, um auf der Geraden vv, einen leuchtenden Punkt 2 zu bezeichnen, dessen Entfernung von s durch

$$f.\ \text{tang}\ 2\beta$$

auszudrücken ist. Die Summe der Verschiebungen, welche der Punkt s durch die Drehung von M allein und N allein erfährt, beträgt demnach:

$$(e+f)\ \text{tang}\ 2\alpha + f.\ \text{tang}\ 2\beta.$$

Es kommt uns jedoch eigentlich darauf an, zu wissen, wie gross die Verschiebung des Punktes s ist, wenn beide Spiegel gleichzeitig eine Drehung erleiden: der Spiegel M um einen Winkel α, der Spiegel N um einen Winkel β. Zur Erläuterung dieses Vorgangs diene Fig. 6, Taf. I, welche der Deutlichkeit wegen in grösserm Maasstab als Fig. 5 gezeichnet werden musste und ausserdem nur die wesentlichen Theile enthält. Der vom Spiegel M unter dem Winkel g_1mn gleich 2α reflectirte Strahl trifft in g_1 auf den um den Winkel β in der

Richtung des Pfeils gedrehten Spiegel N, um in der Richtung g,σ zum zweiten Mal reflectirt zu werden. Denken wir durch $g,$ eine Parallele g,k zu Ls gelegt, so ist die Verschiebung des Punktes s, durch die gemeinsame Drehung bewirkt, gleich:

$$sk + k\sigma,$$

welche Grösse wir wiederum analytisch ausdrücken wollen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \angle mg,n &= 90^\circ - (2\alpha + \beta) \\ \angle mg,\sigma &= 180^\circ - 2.\,mg,n \\ &= 2(2\alpha + \beta) \\ \angle kg,\sigma &= mg,\sigma - 2\alpha \\ &= 2\alpha + 2\beta. \end{aligned}$$

In dem Dreieck mg,n ist aber, wenn wir mn wieder mit e bezeichnen:

$$\begin{aligned} ng, &= \frac{e.\sin 2\alpha}{\sin[90^\circ - (2\alpha+\beta)]} \\ &= \frac{e.\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Mithin in dem rechtwinkligen Dreieck $ndg,$:

$$nd = sk = \frac{e.\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha+\beta)}.\cos\beta$$

und

$$g,d = \frac{e.\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha+\beta)}.\sin\beta.$$

Bezeichnen wir wie früher die Entfernung dk mit f, so ist:

$$k\sigma = (g,d + f)\ \text{tang.}\ kg,\sigma$$

d. h.

$$k\sigma = \left[\frac{e.\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha+\beta)}.\sin\beta + f\right]\text{tang}\,(2\alpha+2\beta).$$

Mithin unsere gesuchte Grösse:

$$sk + k\sigma = \frac{e.\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha+\beta)}\cos\beta + \left[\frac{e.\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha+\beta)}\sin\beta + f\right]\text{tang}\,(2\alpha+2\beta).$$

Bei einer genaueren Prüfung würde sich ergeben, dass dieser Ausdruck nicht identisch ist mit dem, oben für die Summe der Einzelverschiebungen gefundenen. Unter einer bestimmten Voraussetzung jedoch, welche durch das Folgende ihre Rechtfertigung erhält, lässt sich diese Identität herbeiführen, nämlich dann, wenn man die Drehungswinkel α und β für sehr klein ansieht. Dieser Annahme gemäss dürfen wir die Grössen:

$$\sin\alpha^2,$$
$$\sin\alpha . \sin\beta,$$

sowie auch

$$\tang\alpha^2,$$
$$\tang\beta^2$$

gleich Null setzen und erhalten dadurch sowohl für die oben angegebene Summe der Einzelverschiebungen wie auch für die Grösse der Verschiebung des Punktes s bei einer gleichzeitigen Drehung der Spiegel den analytischen Ausdruck

$$2(e+f)\tang\alpha+2f\tang\beta,$$

wobei eine leichte Auflösung und Reduction der beiden gegebenen Ausdrücke dem Leser überlassen wurde. Ein Blick auf Fig. 6, oder besser noch auf Fig. 5 lehrt, dass die Strecke sk, beziehungsweise sh im Vergleich zur Totalverschiebung, sobald der Schirm nur möglichst weit entfernt gestellt wird, als verschwindend klein angesehen werden darf, dass wir mithin noch in dem zuletzt gefundenen Ausdruck die auf die Strecke sh sich beziehende Grösse $2e\tang\alpha$ weglassen dürfen, wodurch also die Totalverschiebung angegeben wird durch den Ausdruck:

$$2f\tang\alpha+2f\tang\beta,$$

dessen erstes Glied sich auf den Spiegel M, dessen zweites sich auf den Spiegel N bezieht. Hätte man beide Spiegel gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung gedreht, so würde dies nur zur Folge gehabt haben, dass der Punkt s nicht aufwärts, sondern abwärts auf der Geraden vv, eine gleich grosse Strecke zurückgelegt hätte. Würde aber ein Spiegel in der einen, der andere in der entgegengesetzten Richtung bewegt, so ist klar, dass, wenn man die eine der Richtungen als positiv wählt, die andere als negativ anzusehen, und die davon abhängende Bewegungsgrösse auch mit dem negativen Vorzeichen in obigen Ausdruck einzuführen ist.

Dies alles zusammengefasst, würde also unser Gesammtresultat vorläufig in folgender Weise auszudrücken sein:

»Ordnet man den ganzen Apparat nach der unter 4. »angegebenen Weise, gestattet man ausserdem nur sehr »geringe Drehungen der beiden Spiegel um ihre horizon»talen Axen, so bewegt sich der leuchtende Punkt s auf »einer verticalen Geraden vv, und die Grösse seiner Ent-

»fernung beiderseits von der Ruhelage wird angegeben »durch die algebraische Summe des Ausdrucks:

$$2f \operatorname{tang} \alpha + 2f \operatorname{tang} \beta.«$$

6. Die zuletzt entwickelten Principien kommen im Folgenden in einer etwas andern Form zur Anwendung, die wir vorher einer kurzen Betrachtung unterwerfen müssen. Aehnlich wie unter 3. möge nämlich vorausgesetzt werden, die beiden Spiegel bewegten sich nicht um zwei horizontale, durch die Punkte m und n laufende Axen H und $H_{,}$, sondern um zwei horizontale Axen H' und $H_{,}'$, welche von ersteren um die Strecke ϱ in der Ebene von M und N entfernt liegen, und deren Durchschnittspunkte mit der Ebene E wir durch $m_{,}$ und $n_{,}$ bezeichnen wollen. Die Fig. 7, Taf. I stellt wiederum den in der Ebene E stattfindenden Vorgang dar. Der Lichtstrahl Lm gelangt normal zum ruhenden Spiegel M, um, nach der Drehung derselben um den Winkel α, in der Richtung ig auf den um den Winkel β gedrehten Spiegel N zu fallen und von hier in der Richung $g\sigma$ reflectirt zu werden, so dass

$$\angle\, gin = 2\alpha$$

$$\angle\, kg\sigma = 2\alpha + 2\beta.$$

Um den analytischen Ausdruck für die Totalablenkung des Punktes s bis σ, d. h. für die Summe

$$sk + k\sigma$$

zu finden, beachten wir zunächst dass in dem Dreieck $gii_{,}$

$$gi_{,} = \frac{(im + e + ni_{,}) \sin 2\alpha}{\cos(2\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{(\varrho \operatorname{tang} \alpha + e + \varrho \operatorname{tang} \beta) \sin 2\alpha}{\cos(2\alpha + \beta)}.$$

Mithin:

$$nd = ks = \frac{(\varrho \operatorname{tang} \alpha + e + \varrho \operatorname{tang} \beta) \sin 2\alpha \,.\, \cos\beta}{\cos(2\alpha + \beta)}$$

und

$$gd = \varrho \operatorname{tang} \beta + \frac{(\varrho \operatorname{tang} \alpha + e + \varrho \operatorname{tang} \beta) \sin 2\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos(2\alpha + \beta)}.$$

Folglich:

$$sk + k\sigma = \frac{(\varrho \operatorname{tang} \alpha + e + \varrho \operatorname{tang} \beta) \sin 2\alpha \,.\, \cos\beta}{\cos(2\alpha + \beta)} +$$

$$+ \left[\varrho \operatorname{tang} \beta + \frac{(\varrho \operatorname{tang} \alpha + e + \varrho \operatorname{tang} \beta) \sin 2\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos(2\alpha + \beta)} + f\right] \operatorname{tang}(2\alpha + 2\beta).$$

Nehmen wir wieder α und β als sehr klein an, so ist es erlaubt, die Grössen $\sin \alpha^2$, $\operatorname{tang} \alpha^2$, $\operatorname{tang} \beta^2$, $\sin \alpha .\, \sin \beta$, gleich

Null zu setzen und der letzte Ausdruck giebt nach gehöriger Auflösung und Reduction:

$$2e \tan \alpha + 2f \tan \alpha + 2f \tan \beta,$$

oder, wenn man noch das erste Glied gleich Null ansieht:

$$2f \tan \alpha + 2f \tan \beta,$$

welcher Ausdruck identisch ist mit dem unter 5. schliesslich erhaltenen. Für die objective Erscheinung ist es demnach nahezu identisch, ob man die Spiegel um die Axen H und H_1 oder um H' und H_1' dreht, falls nur diese Drehung eine sehr geringe ist.

Was nun die subjectiven Erscheinungen bei zweien beweglichen Spiegeln betrifft, sowie die Unterschiede, welche hierbei stattfinden, jenachdem der in den Spiegel N hineinsehende Beobachter dem Auge diese oder jene Stellung giebt, so lassen sich hier dieselben Betrachtungen wiederholen, welche unter 3. angestellt wurden: Die auftretenden Unterschiede werden nahezu ganz verschwinden, sobald man die Lichtquelle soweit entfernt, dass die Strahlen von L nach n, und von L nach m, mit n,n und m,m beziehungsweise nahezu rechte Winkel bilden.

7. Treffen wir die Anordnung des ganzen Apparats so, wie es unter 4. angegeben, setzen aber voraus, dass nicht die beiden Spiegel, sondern nur der eine sich um eine horizontale Axe drehe, während der andere z. B. N um eine verticale Axe eine Drehung erleidet, so leuchtet ein, dass nunmehr die Erscheinungen, welche der leuchtende Punkt s auf dem Schirme darbietet, wesentlich andere werden. Die perspectivisch entworfene Fig. 8, Taf. I erleichtere das Verständniss des Vorgangs bei einer solchen Drehung der Spiegel. Es ist hierin zunächst angenommen, dass der Durchschnitt der früher charakterisirten Ebene E mit der Ebene des Spiegels N, nämlich die Gerade VV, als verticale Umdrehungsaxe für diesen Spiegel gelte. Der in der Richtung Lm auf den nicht weiter gezeichneten Spiegel M fallende Lichtstrahl möge bei der Drehung von M um die durch m laufende horizontale Drehungsaxe nach g hin auf den Spiegel N zurückgeworfen werden. Geschieht nun die Drehung um VV, so, dass das, bei ruhendem Spiegel N mit der Geraden gk zusammenfallende Einfallsloth des Punktes g bei der Drehung in die Lage gk_1 gelangt,

so wird eine durch $gk_{,}$ und gm gelegte Ebene die Reflexionsebene für den gedrehten Spiegel N bezüglich des Strahls mg sein, und der Strahl mg wird in der Richtung $g\sigma$ von N so reflectirt, dass der Winkel $\sigma gk_{,} = lgk_{,}$. Der Punkt s ist hierbei nach σ gelangt: seine horizontale Verschiebung ist gleich

$$sp = lp_{,},$$

seine verticale gleich

$$p\sigma.$$

Suchen wir für diese beiden Verschiebungen analytische Ausdrücke zu gewinnen. Ist der Drehungswinkel von M gleich α, von N gleich β, so leuchtet ein, dass

$$sp = 2.kk_{,} = 2f.\operatorname{tang} kgk_{,}$$

mithin, da

$$\angle kgk_{,} = \beta$$

$$sp = 2f \operatorname{tang} \beta,$$

wobei f seine frühere Bedeutung behalten. Um ferner die Verschiebung $p\sigma$ zu finden, beachten wir, dass

$$p_{,}\sigma = 2.q_{,}k_{,} = 2lk.$$

Mithin:

$$p\sigma = 2lk - pp_{,} = 2lk - ls.$$

Es ist aber:

$$lk = f.\operatorname{tang} lgk$$
$$= f \operatorname{tang} 2\alpha$$

und

$$ls = (f - e) \operatorname{tang} 2\alpha_{,,}$$

wobei e die Entfernung der Spiegel bedeutet, demnach

$$p\sigma = (f + e) \operatorname{tang} 2\alpha.$$

Setzen wir wiederum sehr kleine Drehungswinkel voraus, so ist sehr annähernd

$$p\sigma = 2(f + e) \operatorname{tang} \alpha.$$

Beachten wir schliesslich, dass bei einer hinlänglich grossen Entfernung des Schirms die Grösse

$$2e \operatorname{tang} \alpha$$

im Vergleich zur ganzen Grösse $p\sigma$ verschwindend klein ist, so ergiebt sich, dass die Ausdrücke:

$$2f.\operatorname{tang} \alpha$$
$$2f.\operatorname{tang} \beta$$

beziehungsweise die Grösse der verticalen und horizontalen Verschiebung des Punktes s angeben. Betrachtet man den Punkt s als den Mittelpunkt eines rechtwinkligen Coordinaten-

systems, dessen eine Axe mit *sp*, dessen andere mit *sk* zusammenfällt, so sind die beiden obigen Ausdrücke, mit andern Worten ausgedrückt, die Coordinaten eines Punktes *σ*, der einer Curve angehört, welche der leuchtende Punkt während der Bewegung der Spiegel beschreibt.

8. Geschieht die zuletzt betrachtete Drehung der Spiegel nicht um die bezeichneten Axen, sondern um zwei andere Axen, die in den Ebenen der Spiegel um einen gewissen Abstand von erstern entfernt und parallel zu jenen gedacht werden können, so ändern sich die Erscheinungen. Man begreift jedoch wohl, dass hier ganz ähnliche Schlussfolgerungen sich machen lassen, wie unter 6., wo es sich um eine, von der unter 5. beschriebenen Drehungsart etwas abweichende Bewegung der Spiegel handelte. Wir würden auch in unserm jetzigen Falle wiederum Ausdrücke finden können, die die horizontale und verticale Verschiebung des Punktes *s* bezeichnen; unter der Voraussetzung jedoch, dass die Drehungswinkel sehr klein, würden diese Ausdrücke mit den in 7. gefundenen als identisch sich erweisen.

Was ferner die subjective Beobachtung betrifft, so werden die Erscheinungen, welche der zuletzt reflectirte Lichtstrahl *gσ* Fig. 8 in dem Auge des Beobachters erzeugt, sehr nahe dieselben sein, wie die objectiv entworfenen, falls man nur bei der Aufstellung des Apparats die unter 3. erläuterten Principien in gehöriger Weise beachtet.

§. 2.

Anwendung der Grundsätze des vorigen §. bei der Methode Lissajous'.

1. Die, bis jetzt entwickelten, Principien sind in einer solchen Form gegeben, dass sie in mancherlei Fällen eine Anwendung gestatten. Für unseren gegenwärtigen Zweck soll nun nachgewiesen werden, wie sie speciell zur Anwendung gekommen sind bei der Methode Lissajous' mit Hülfe zweier Stimmgabeln gewisse Arten von Schwingungscurven darzuzustellen, sei es in objectiver oder subjectiver Weise.

Die erste Art der Zusammenstellung zweier Stimmgabeln, welche Lissajous in dieser Beziehung anwendet, möge durch die Fig. 9, Taf I erläutert werden. Zwei Stimmgabeln müssen

mit ihrem Fusse in eine geeignete Unterlage festgeschraubt und dann in einiger Entfernung von einander so aufgestellt werden, dass ihre Zinken in eine Ebene fallen und ausserdem nahezu parallel laufen. Die beiden einander zugekehrter Zinken sind an ihrem obern Ende mit zweien Plan-Metallspiegelchen bewaffnet, welche durch geeignete Gegengewichte, die man an den, in der Figur als frei erscheinenden, anderen Zinken anbringt, äquilibrirt werden. Fällt nun ein Lichtbündel in nahezu senkrechter Richtung auf *M*, so wird es von hier nach *N* und von da nach dem Schirme *S* hin reflectirt, um auf diesem einen leuchtenden Punkt *s* zu bezeichnen. Als Lichtquelle benutzt man bei dieser Art der objectiven Darstellung die Sonne oder auch das electrische Licht, so, dass das Licht, bevor es auf *M* trifft, eine kleine, scharf begrenzte, kreisrunde Oeffnung *L* durchdringt, welche in einem Fensterladen oder einem vorgesetzten Schirme angebracht ist. Damit der leuchtende Punkt *s* möglichst scharf wird, stellt man ferner in geeigneter Entfernung vor den Schirm *S* eine Linse *K*, durch welche das zuletzt reflectirte Lichtbündel vor seinem Auffallen auf *S* dringen muss. Werden nun die beiden Stimmgabeln zum Tönen gebracht, so schwingen mit ihnen die Spiegelchen hin und her, der leuchtende Punkt *s* bewegt sich auf dem Schirme *S* und erzeugt das Bild einer verticalen Geraden. Denn offenbar kommen bei dieser ganzen Zusammenstellung des Apparats diejenigen Principien zur Anwendung, welche unter 5. und speciell unter 6. erläutert worden sind: Nämlich erstens bewegen sich die Spiegel um zwei horizontale Axen, die an den untern Enden der sich zugewandten Zinken liegen (da wir ja nur immer Grundtöne der Stimmgabeln berücksichtigen); zweitens können die Drehungswinkel der Spiegel als sehr klein angesehen werden und drittens entspricht die weitere ganze Anordnung des Apparats den unter 5. und 6. gemachten Voraussetzungen.

Die leuchtende Gerade, welche auf diese Weise bei der Bewegung der Stimmgabeln, sich vor den Augen des Beobachters darstellt, bietet nun keineswegs das Aussehen einer auf ihrer ganzen Länge gleichmässig erhellten Linie, sondern es zeigen sich längs ihrer Strecke hellere und dunklere Stellen, deren Anzahl und Entfernung vom Punkte *s*, abhängt von der

Zahl der Schwingungen, welche die beiden Stimmgabeln in einer gewissen Zeit ausführen; ferner von der Intensität dieser Schwingungen und endlich von der sogenannten Phasendifferenz, die zwischen den beiden Gabeln vorhanden ist. Den genauen Zusammenhang dieser Elemente mit dem Aussehen der Geraden werden wir in einem spätern Abschnitt einer ausführlichen Betrachtung unterwerfen. Vorläufig sei nur noch erwähnt, dass ich von einer Beschränkung, nach der nur zwei Stimmgabeln, die vollständig oder sehr nahe unisono klingen, bei den Versuchen vortheilhaft benutzt werden könnten, Lissajous gegenüber, hier und im Folgenden abgesehen habe.

Will man die ganzen Erscheinungen subjectiv betrachten, so lässt sich als Lichtquelle vortheilhaft eine hell leuchtende Lampe anwenden, die mit einem dunkeln Schirm umgeben ist, der an einer geeigneten Stelle mit einem kleinen runden Loche durchbohrt ist, um ein schmales Lichtbündel hindurch zu lassen. Bevor die Stimmgabeln in Bewegung gesetzt werden, bewaffnet sich der Beobachter mit einem Fernrohr und sieht aus einer solchen Entfernung in den Spiegel *N*, dass er eben einen scharf begrenzten leuchtenden Punkt erblickt.

2. Die zweite Art der Zusammenstellung zweier Stimmgabeln und die hierbei weiter zu beachtenden Einrichtungen, welche Lissajous zur Erzeugung von Schwingungscurven anwandte, möge durch die Fig. 10, Taf. I näher erläutert werden. Auf geeigneten Stativen sind zwei Stimmgabeln so fest geschraubt, dass die Zinkenebene der einen horizontal, die der andern vertical zu liegen kommt. Die beiden einander zugekehrten Zinken der Gabeln sind wiederum mit zweien Plan-Metallspiegelchen armirt und diese durch Gegengewichte an den abgewandten Zinken äquilibrirt. In einiger Entfernung von den Gabeln ist einerseits eine hellleuchtende Lampe *G*, andererseits ein Fernrohr *F* aufgestellt und der ganze Apparat weiterhin noch so geordnet, dass der durch das Loch *L* des, den Cylinder der Lampe umgebenden dunkeln Schirms dringende Lichtbüschel nahezu senkrecht auf *M*, von hier nahezu senkrecht auf *N* und von hier endlich in der Richtung der Axe des Fernrohrs in das Auge eines Beobachters gelangt, um so, während die Gabeln noch ruhig sind, einen hellen Punkt ins Gesichtsfeld zu bekommen. Diese Anordnung lässt sich leicht,

namentlich durch Vor- und Rückwärts-, sowie auch Auf- und Abwärtsschieben des Klotzes *P*, worin zunächst die horizontale Gabel festgeschraubt ist, bewerkstelligen. Werden nun die beiden Gabeln zum Tönen gebracht, so beschreibt der leuchtende Punkt eine leuchtende Curve, die von dem Beobachter in ihrer Continuität ganz oder theilweise überschaut wird, insofern die Dauer des Geschichtseindrucks länger oder kürzer ist als die Zeit, in welcher der leuchtende Punkt seine Bahn vollständig zurücklegt. Wie bei der vorigen Zusammenstellung der Stimmgabeln das Aussehen der leuchtenden Geraden als in genauem Zusammenhang mit der Anzahl und Intensität der Schwingungen der Gabeln, sowie der vorhandenen Phasendifferenz anerkannt werden musste, so wird auch bei dieser rechtwinkligen Anordnung der Gabeln die resultirende Schwingungscurve ihrer Form nach in genauem Zusammenhang mit diesen Elementen stehen, und gerade hierin liegt die Bedeutung der Schwingungscurven, die wir erst später ganz speciellen Betrachtungen unterwerfen werden.

Was die Theorie der bei dieser zweiten Art der Zusammenstellung des Apparats erhaltenen Erscheinungen anlangt, so ist einleuchtend, dass von den Principien ausgegangen werden muss, die §. 1; 7 und §. 1; 8 entwickelt worden sind. Die Fig. 10 stellt den ganzen Apparat so dar, wie er bei subjectiver Beobachtung einzurichten ist. Wollte man objective Darstellungen machen, so wäre nur statt der Lampe eine hellere Lichtquelle und statt des Fernrohrs ein auffangender Schirm zu substituiren.

§. 3.

Des Verfassers Methode, die hierher gehörigen Schwingungscurven darzustellen.

1. In der Fig. 11, Taf. 1 stellt *Ms* einen in der Ruhelage befindlichen verticalen Stab vor, der jedoch die Fähigkeit besitzt, in der Ebene $vv_1v_2v_3$ regelmässige Schwingungen innerhalb der Elongationsgrenzen $M\mu$ und $M\mu_1$ auszuführen. Das obere Stück unseres Stabes, nämlich *Ns*, sei ferner so beschaffen, dass es bei festem Punkte *N* regelmässige Schwingungen in einer Ebene $hh_1h_2h_3$ vollbringt, welche Ebene zu

$vv_1v_2v_3$ unter einem bestimmten Winkel geneigt ist. Eine durch den Punkt s gelegte Horizontalebene würde demgemäss mit den beiden bezeichneten Schwingungsebenen sich in den Geraden vv_1 und hh_1 durchschneiden, so dass der Winkel vsh oder v_1sh_1 als der Neigungswinkel der Schwingungsebenen zu betrachten ist. Nehmen wir an, dass weder der ganze Stab Ms noch das obere Stück Ns bei ihren Bewegungen sich krümmen, so würde der Punkt s einmal in einem Kreisbogen $\mu\mu_1$, das andere Mal in einem Kreisbogen $\nu\nu_1$ hin und her geführt werden. Sind ausserdem die Elongationswinkel noch gering, so dürfen wir diese Bögen als zwei geradlinige Strecken der Geraden vv_1 und hh_1 betrachten. Gesetzt endlich, wir leiteten eine Bewegung ein, bei welcher das untere Stück MN beständig in der Ebene $vv_1v_2v_3$ bleibt, während die Schwingungsebene des obern Stückes Ns so mit hin und her geführt wird, dass die Gerade hh_1 sich stets parallel bleibt, so ist einleuchtend, dass der Punkt s bei dieser Bewegung weder eine Gerade $\mu\mu_1$, noch eine Gerade $\nu\nu_1$ beschreibt, sondern eine resultirende Bewegung einschlägt und sich auf einer, unsern Voraussetzungen gemäss, ebenen Curve bewegt, deren Form offenbar abhängt:

a) von einer Zahl m, welche angiebt, wie viel Schwingungen Ms;
b) von einer Zahl n, welche angiebt, wie viel Schwingungen Ns in der Zeiteinheit ausführt:
c) von der Phasendifferenz, die zwischen der Bewegung von Ms und Ns existirt, einer Grösse, die wir im Folgenden mit ϑ bezeichnen werden;
d) von dem Winkel φ, den die Geraden vv_1 und hh_1 mit einander bilden und
e) von der Intensität der Schwingungen oder der Grösse von $\mu\mu_1$ und $\nu\nu_1$.

2. Lässt sich die so eben beschriebene Einrichtung in Wirklichkeit ausführen, lassen sich namentlich bei dieser Einrichtung die Schwingungszahlen m und n, die Phasendifferenz ϑ, der Winkel φ, sowie die Intensität der Schwingungen willkürlich abändern, so ist einleuchtend, dass man auf diese Weise sämmtliche Bewegungen darstellen kann, die als das Resultat zweier beliebigen, unter einem beliebigen Winkel ge-

gen einander gerichteten geradlinigen Vibrationsbewegungen zu betrachten sind.

Zu dem Ende habe ich nun folgenden Apparat construirt, dessen einfachste Einrichtung von mir bereits früher*) unter dem Namen eines Universalkaleidophons beschrieben wurde. In Fig. 12, Taf. I ist *K* eine Klemme aus Holz gefertigt, welche mittelst der einen Schraube an eine Tischecke oder ein Fensterbret festgeschraubt werden kann und deren andere Schraube den Zweck hat, zunächst auf ein prismatisches Holzstückchen zu wirken, und dann zwischen diesem und dem übrigen Theile der Klemme Stahllamellen (oder zu einem andern Zwecke auch cylindrische Stäbe) fest einzuspannen. Das prismatische Holzstückchen ist in der Figur mit seiner obern Grenzfläche sichtbar, zugleich mit dem obern Ende einer, für die Darstellung später zu beschreibender Erscheinungen nützlichen, Falze. Seine Führung erhält das prismatische Stückchen durch zwei in ihm befestigte und in zweien, im vordern Klemmentheil angebrachten Löchern, sich bewegende Stifte. Ebenso wie die Klemme *K* hat auch die aus Messing angefertigte Klemme *k* einen doppelten Zweck zu erfüllen: Mittelst des einen Schräubchens lässt sie sich an dem obern Ende der Lamelle *L* (oder auch an dem obern Ende eines cylindrischen Stabes) unter jedem beliebigen Winkel im Azimuth feststellen; das andere Schräubchen dient dazu, um das eine aufgeschlitzte Ende der Klemme *k* wieder mehr oder weniger zusammen zu schrauben und auf diese Weise das Stahllamellchen *l* (oder ein cylindrisches Stahlstäbchen) festzuklemmen. Die obersten Enden der Lamellen *L* und *l* sind in ganz gleicher Weise, wie bei dem Wheatstone'schen Kaleidophon mit vergoldeten Messingknöpfchen versehen, um die Bewegungen, die sie machen, durch den Reflex des Lichtes gehörig hervorzuheben.

3. Nehmen wir an, die Lamelle *L* sei in verticaler Lage in der Klemme *K* befestigt, und auf dem obern Ende von *L* die Klemme *k*, sowie hierin das Lamellchen *l* festgeschraubt, so sind es zunächst zwei Ebenen, welche ihrer Lage nach aufgefasst werden müssen, nämlich eine Ebene, die man sich durch die Verticalaxe und senkrecht zur breiten Fläche von *L*,

*) Pogg. Annal. Bd. 115 (1861) S. 117.

und eine Ebene, die man sich durch die Verticalaxe und senkrecht zur breiten Fläche von l gelegt denken kann; die erstere werde einfach mit E, die letztere mit e bezeichnet. Wird nun L und hiermit die Verbindung von k und l, unter Vermeidung aller Torsion, aus der Ruhelage herausgebracht und sich dann selbst überlassen, so wird das ganze System $L+k+l$ in eine schwingende Bewegung gerathen, wobei jeder Punkt desselben eine ebene Curve beschreibt, deren Ebene parallel zu E liegt, wobei speciell der obere Endpunkt von l sich in einer Curve bewegt, die der Curve $\mu\mu$, Fig 11, Taf. I entspricht. Wird nicht das ganze System, sondern nur das Lamellchen l, unter Vermeidung aller Torsion, aus der Ruhelage herausgedreht, so wird es, sich selbst überlassen, Schwingungen ausführen, wobei jeder Punkt eine Curve beschreibt, die parallel zu e liegt, wobei speciell der obere Endpunkt von l eine Bahn einschlägt, die der Curve $\nu\nu$, Fig. 11, Taf. I entspricht. Ist die Bewegung rasch genug, und blickt das Auge in verticaler Richtung von oben nach unten auf das erleuchtete Endknöpfchen von l, so würde es bei der Bewegung des ganzen Systems, sowie der obern Lamelle allein, beziehungsweise eine in der Ebene E und e gelegene horizontale erleuchtete Gerade wahrnehmen. Aber abgesehen von dieser speciellen Stellung des beobachtenden Auges wird es erlaubt sein, die bogenförmigen Curven als Gerade anzusehen, sobald nur die Elongationsgrenzen nicht allzugross sind. Würden nun aber beide Bewegungen gleichzeitig eingeleitet, nämlich eine Bewegung des ganzen Systems und die partielle von l, so ist einleuchtend, dass das Endknöpfchen von l eine Curve beschreibt, die als das Resultat zweier, dieses Endknöpfchen zu gleicher Zeit angreifender geradliniger Vibrationsbewegungen zu betrachten ist.

4. Es bedarf keines Nachweises, dass unter den Erscheinungen, welche sich mit Hülfe dieses einfachen Mechanismus darstellen lassen, diejenigen mit begriffen sind, welche Lissajous nach der im vorigen §. erläuterten Methode zu erzeugen im Stande ist. Denn der Zusammenstellung des Apparats, gemäss 1 §. 2, entspricht in unserm Falle eine Stellung der Lamellen L und l, wobei der Winkel $\varphi = 0^0$ ist, und ebenso einer Zusammenstellung, gemäss 12 §. 2, eine Stellung der beiden Lamellen, wobei $\varphi = 90^0$. Die Stellungen der letz-

tern unter einem Winkel $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 90^0$ sind aber nur zwei specielle unter den willkürlichen Stellungen, die man mit Leichtigkeit bei dem Apparate Fig. 12, Taf. I anordnen kann, so dass nach dieser Methode auch viel allgemeinere Erscheinungen dargestellt werden können, als nach der Lissajous'schen. Es wäre jedoch ein Leichtes gewesen, den Apparat Lissajous' Fig. 10, Taf. I so einzurichten, dass sich zwei geradlinige Vibrationsbewegungen unter einem beliebigen Winkel combiniren liessen. Zu dem Ende müsste der Klotz P Fig. 10, Taf. I um eine horizontale Axe drehbar gemacht werden. Was die Aenderung der Schwingungszahlen m und n bei der Lissajous'schen Methode anlangt, so lässt sich diese einmal dadurch erreichen, dass man sich aus einer hinreichenden Anzahl von Stimmgabeln je zwei auswählt, die eben ein gewünschtes Intervall mit einander bilden, natürlich nachdem dieselben schon mit den Spiegeln und Gegengewichten armirt sind; andererseits liessen sich die Zahlen m und n auch dadurch ändern, dass man an einer der Stimmgabeln noch verschiebbare Gewichte anbringt, um so den Ton bis zu einer gewissen Grenze zu vertiefen. Bei meiner Methode erreicht man die Aenderung des m und n einfach durch höheres oder tieferes Einspannen der Lamellen L und l, wobei der Experimentator sehr bald die nöthige Uebung erlangt, vorausgesetzt, dass er schon auf anderem Wege die Abhängigkeit der Curvenformen von den Zahlen m und n aufgefasst hat.

Was die Aenderung der Grösse ϑ betrifft, so vollbringt sich diese im Apparate von selbst, indem diese Grösse in rascherem oder langsameren Tempo alle möglichen Werthe durchläuft, aus Gründen, die späterhin angegeben werden sollen. Der Aenderung des ϑ entsprechend, ändert sich allmälig vor den Augen des Beobachters die Form der Schwingungscurve, so dass, wenn z. B. das Verhältniss $n : m$ nahezu wie $1 : 2$ erreicht ist, bei diesen Formen diejenige Folge sich erkennen lässt, welche in der Reihe 2, Taf. V, VI und VII dargestellt ist. Sollten die Uebergänge zu rasch erfolgen, so dass es dem Auge unmöglich ist, einzelne, bestimmten Werthen von ϑ entsprechende Curven zu erkennen, so deutet dies nur an, dass das Verhältniss $n : m = 1 : 2$ durch gehörige Einstellung der Lamellen erst noch vollständiger erreicht werden muss.

5. Die Einrichtung eines Apparats im Sinne der Figur 12, Taf. I gestattet noch Vereinfachungen, die wir im Interesse des unmittelbar Folgenden einer nähern Betrachtung unterwerfen wollen. Um nämlich die Schwingungszahlen m und n zu ändern, und somit jede gewünschte Schwingungscurve zu erhalten, ist es gerade nicht nöthig, dass von dem Lamellchen l Fig. 12, Taf. I verschieden lange und kurze Stücke in der Klemme k eingespannt werden können, sondern man erreicht diesen Zweck schon durch eine gehörige Einstellung der Lamelle L allein, bei einer sich stets gleich bleibenden Länge von l vorausgesetzt, dass diese Länge im Vergleich zur ganzen Länge von L ein für die Versuche günstiges Verhältniss besitzt. Dies vorausgesetzt, lässt sich die Befestigung von l auf L auch in der Weise bewerkstelligen, wie die Fig. 13, Taf. I zeigt: das untere Ende von l ist mit einem vertical durchbohrten Fortsatze versehen, der unmittelbar auf den obern Stift von L aufgesetzt und mit einem Schräubchen festgeschraubt werden kann, so dass sich die Ebenen von l und L unter einem beliebigen Winkel gegen einander feststellen lassen.

Sieht man davon ab, diese Ebenen von l und L unter einem beliebigen Winkel zu einander feststellen zu können, und begnügt sich damit, nur etwa Schwingungscurven darzustellen, bei welchen der Winkel $\varphi = 90^0$, so lässt sich die Einrichtung der Fig. 13, Taf. I noch mehr vereinfachen. Zu dem Ende kann man den ganzen schwingenden Apparat aus einer Lamelle anfertigen, deren oberer Theil mit einer Zange um den untern herumgebogen oder auch mit einem Hammer umgehämmert worden ist, bis eben diese beiden Theile den genannten Winkel mit einander bilden. Auch lässt sich eine solche Lamelle aus einem Eisen-, Kupfer- oder Messingdrahte herrichten, dessen oberer und unterer Theil unter 90^0 glatt gehämmert werden. Es versteht sich von selbst, dass man auf diese Weise mit gleicher Leichtigkeit dem Winkel φ auch einen andern Werth ertheilen kann.

6. Die bis jetzt beschriebenen Einrichtungen dienten zur Darstellung von Schwingungscurven, welche als resultirende Bewegung zweier geradliniger, unter einem beliebigen Winkel gegen einander geneigter Vibrationsbewegungen zu betrachten sind. Mit Leichtigkeit gestatten diese Einrichtungen

eine solche Erweiterung, dass man auch drei, vier und mehr geradlinige Bewegungen zu einer einzigen resultirenden verbinden kann. Was die Verbindung dreier Vibrationsbewegungen betrifft, so hätte man es allgemein mit drei Schwingungszahlen, zwei Werthen des Winkels φ und zwei Werthen der Grösse ϑ zu thun, und es leuchtet ein, wie hierdurch eine Mannigfaltigkeit der Erscheinungen zum Vorschein kommt, deren ausführliche Darstellung nicht leicht zum Gegenstande allgemeiner und gründlicher Untersuchung gemacht werden dürfte. Noch mehr gilt dies von der Combination von vier oder gar mehr Vibrationsbewegungen. Nur einzelnen der hierher gehörenden Erscheinungen habe ich, ihrer Einfachheit halber, sowie mit Rücksicht auf die Methode ihrer Darstellung, eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt, und ich will hier schon zu ihrer vorläufigen Charakterisirung einige Bemerkungen machen. Bei der Verbindung dreier geradliniger Vibrationsbewegungen kann nämlich der Fall eintreten, dass zwei derselben für sich eine Ellipse als resultirende Curve liefern, so dass man die Sache auch so ansehen kann, als hätte man es nur mit nur zweien Componenten: einer elliptischen und einer geradlinigen, zu thun. Ebenso können bei der Verbindung von vier geradlinigen Componenten je zwei eine elliptische liefern, so dass man nach einer andern Betrachtungsweise in diesem Falle nur zwei, aber elliptische Componenten besitzt. Diese beiden Fälle sind es nun, welche in dieser Schrift eine genauere Behandlung erfahren haben, so dass der Hauptinhalt gegenwärtiger Arbeit, wie bereits in der Einleitung angegeben wurde, sich bezieht auf die Erscheinungen, entstehend durch das Zusammenwirken zweier Vibrationsbewegungen, von denen jede sowohl geradlinig wie elliptisch sein kann.

Die beiden Fälle, in denen elliptische Componenten auftreten, erfordern nur einen sehr einfachen, später näher zu beschreibenden Apparat. Wollte man aber über diese einfacheren Fälle hinausgehen und das Auge durch den Anblick von Curven ergötzen, wobei drei oder vier geradlinige Componenten zusammenwirken, ohne dass gerade die Beschränkung vorhanden, als gäben zwei oder je zwei eine Ellipse, so kann man einfach auf folgende Art verfahren. Handelt es sich um die Combination dreier geradliniger Bewegungen, so ist nur nöthig,

den Apparat der Fig. 12 oder 13, Taf. I so zu ändern, dass auf den oberen Ende von *l* noch eine dritte Lamelle angebracht wird. Man wird jedoch schon eine sehr grosse Mannichfaltigkeit der Erscheinungen erhalten, wenn man die Lamelle *L* ersetzt durch eine unter 5. beschriebene gedrehte Lamelle. Verschafft man sich hierzu noch eine zweite leichtere, und bringt diese an die Stelle von *l*, so kann man mit Leichtigkeit eine Reihe der mannigfaltigst gestalteten Curven erhalten, erzeugt durch die Verbindung von vier geradlinigen Vibrationsbewegungen.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass, wenn die Combination zweier geradliniger Vibrationsbewegungen dem Auge des Beobachters in eigenthümlicher Weise ein Bild der Intervalle liefert, die Combination von drei, vier oder mehr Componenten in gleicher Weise einen drei-, vier- oder mehrstimmigen Accord darstellt.

Zweites Capitel.

Graphische Darstellung der Schwingungscurven, erzeugt durch das Zusammenwirken zweier geradlinigen Vibrationsbewegungen. Eigenschaften der Curven.

---

§. 4.

Die Methoden der graphischen Darstellung.

1. Wie überhaupt zur Erläuterung der Schwingungsvorgänge eine graphische Darstellung derselben sich vortheilhaft erweist, so ist es auch hier der Fall, wo die Raschheit und beständige Veränderung, mit der die optisch-mechanischen Darstellungen sich vor dem Auge des Beobachters entwickeln, eine unmittelbare und bleibende Fixirung im Allgemeinen noch nicht zuliessen. Erst durch die wiederholte Vergleichung der graphischen Darstellung von Schwingungscurven mit den optisch-mechanischen gelangt der Beobachter zur gründlichen Kenntniss dieser Erscheinungen. Es ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, dass der, welcher sich mit dem gegenwärtigen Theile der Wellenlehre und Akustik befasst, selbst Uebung im Zeichnen dieser Erscheinungen erlangt, und hierzu mögen die nächsten Betrachtungen dienen.

Die Idee, welche der graphischen Darstellungsweise zu Grunde liegt, ist einfach die, dass wir die Zeiteinheit in eine hinlänglich grosse Anzahl gleicher Zeittheilchen getheilt denken, und die Orte zu bestimmen suchen, in welchen der be-

wegte Punkt, jedem solchen Zeittheilchen entsprechend, sich befindet, dass wir somit eine hinlängliche Anzahl Bestimmungspunkte besitzen, um aus freier Hand durch deren Verbindung, mit Rücksicht auf die möglichst richtigen Krümmungsverhältnisse, eine Curve zeichnen zu können. Zunächst müssen wir nun den Begriff der Zeiteinheit bestimmen, um hier wie im Folgenden stets daran festhalten zu können. Denken wir uns: der bewegte Punkt sei genöthigt, zweien Vibrationsbewegungen zu gleicher Zeit Folge zu leisten, deren Schwingungszahlen m und n, so wird hier wie im Folgneden angenommen, dass m und n einmal ganze Zahlen, zugleich aber auch die kleinsten ganzen Zahlen seien, die das Verhältniss der Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit für die beiden Vibrationsbewegungen angeben. Eben diese Zeit wollen wir als die Zeiteinheit ansehen und müssen sie demnach definiren: als eine Zeitgrösse, welche verfliesst, während, vermöge der einen Bewegung, der bewegte Punkt m und, vermöge der andern, zugleich n Vibrationen vollbringt. (Unter einer Vibration verstehen wir stets einen Hin- und Hergang zusammengenommen, wenn nicht etwa besondere Bemerkungen vorausgehen.) Die Anzahl der Theile, in welche man die Zeiteinheit zerlegen kann, richtet sich nach der Grösse des Maasstabes der zu entwerfenden Zeichnungen: bei den Zeichnungen, welche ich auszuführen hatte, theilte ich die Zeiteinheit in 32 gleiche Theile. Bezeichnen wir die Schwingungsdauer der einen Vibrationsbewegung mit t_1, die der andern mit t_2, so ist unserer gegebenen Definition zu Folge:

$$t_1 = \frac{1}{m}$$

$$t_2 = \frac{1}{n}.$$

Bei den folgenden Constructionen erscheint nun nicht die Zeiteinheit, sondern die Zeit t_1 und t_2 in 32 gleiche Theile getheilt, und es ist demnach wohl zu beachten, dass eine Anzahl p Zweiunddreissigstel dieser letzteren Zeiten nicht zu verwechseln ist mit einer gleichen Anzahl Zweiunddreissigstel der Zeiteinheit, dass man vielmehr, um auf letztere zu reduciren die Zahl $\frac{p}{32}$ durch m beziehungsweise durch n zu dividiren, oder, falls man aus einer Anzahl p Zeit-

theilchen der Zeiteinheit die Zahl der Zeittheilchen der Schwingungsdauer t_1 oder t_2 herleiten will, die Zahl $\frac{p}{32}$ mit m bzw. n zu multipliciren hat.

Noch sei bemerkt, dass im Folgenden die Grössen, welche die Phasendifferenzen bezeichnen, stets als Theile der Zeiteinheit angesehen werden und nicht etwa als Theile der Zeiten $\frac{1}{m}$ oder $\frac{1}{n}$.

2. In unserer Fig. 14, Taf. I stellen $\mu\mu_1$ und $\nu\nu_1$ zwei im Punkte s sich durchschneidende gerade Linien vor, und es werde weiter angenommen, der Punkt s sei genöthigt, zweien geradlinigen Vibrationsbewegungen zu gleicher Zeit Folge zu leisten, von denen die eine mit $\mu\mu_1$ die andere mit $\nu\nu_1$ zusammenfalle, und deren Elongationsweiten beziehungsweise gleich $s\mu = s\mu_1$ und gleich $s\nu = s\nu_1$ seien. Bedeuten m und n die den beiden Vibrationsbewegungen angehörenden Schwingungszahlen, so soll nun die Aufgabe gelöst werden: wo befindet sich der Punkt s am Ende eines beliebigen Zeittheilchens der Zeiteinheit?

Wäre der Punkt s genöthigt, nur auf der Geraden $\mu\mu_1$ sich zu bewegen, so würde er eine Schwingung in der Zeit $\frac{1}{m}$ vollenden, und um die Orte zu bestimmen, welche er in jedem Zweiunddreissigstel dieser Zeit auf $\mu\mu_1$ einnimmt, haben wir bekanntlich nur nöthig, über $\mu\mu_1$ einen Halbkreis zu beschreiben, diesen in 16 gleiche Theile zu theilen und von den Theilpunkten Perpendikel auf $\mu\mu_1$ zu fällen: die Durchschnittspunkte, welche auf $\mu\mu_1$ hierdurch entstehen, sind die gewünschten Orte. In unserer Figur sind dieselben, nach vorausgegangener Construction, bestimmt und als stärkere Punkte hervorgehoben; die beigesetzten Zahlen deuten ihre Zugehörigkeit zu den entsprechenden Zeittheilchen an. Ein ganz ähnliches Verfahren hätte man anzuwenden für den Fall, dass der Punkt s genöthigt wäre, nur der Bewegung $\nu\nu_1$ zu folgen, um hierauf eine Schwingung in der Zeit $\frac{1}{n}$ zu vollenden. Als erstes Beispiel wollen wir nun annehmen: es wäre

$$m = n = 1,$$
$$\vartheta = 0,$$

wobei also ϑ die Phasendifferenz bedeutet, und es fragte sich: wo befindet sich s nach $\frac{3}{32}$ der Zeiteinheit? Den Erläuterungen am Ende von 1. zu Folge würde er während dieser Zeit auf $\mu\mu_{,}$ um $3 . 1 = 3$ Theilpunkte, auf $\nu\nu_{,}$ um ebensoviel fortgerückt sein, um also beiden Bewegungen zu genügen, würde er sich in dem fraglichen Zeitpunkt da befinden, wo zwei durch die resp. Theilpunkte 3 parallel zu $\mu\mu_{,}$ und $\nu\nu_{,}$ gelegte Gerade sich schneiden, d. h. im Punkte M_1. In einem zweiten Beispiele werde angenommen, es wäre

$$m = 2$$
$$n = 1$$
$$\vartheta = \frac{9}{32}$$

und es fragte sich: wo befindet sich der Punkt s nach $\frac{5}{32}$ der Zeiteinheit? Bezieht sich, wie wir annehmen wollen, die Grösse ϑ nur auf die Bewegung auf $\mu\mu_{,}$, so heisst also die Annahme $\vartheta = \frac{9}{32}$ nichts anderes, als dass der Punkt s vermöge der Bewegung auf $\mu\mu_{,}$ schon um 9 Zeittheilchen der Zeiteinheit vorausgeeilt ist, wenn die Bewegung auf $\nu\nu_{,}$ und überhaupt die gemeinsame Bewegung beginnt. Ist aber s auf $\mu\mu_{,}$ schon 9 Zeittheilchen der Zeiteinheit in Bewegung gewesen, so ist er, gemäss den Erörterungen unter 1, um $2 . 9 = 18$ Theilpunkte fortgerückt, ehe die gemeinsame Bewegung beginnt; $\frac{5}{32}$ der Zeiteinheit nach diesem Momente weiter befände er sich auf $\mu\mu_{,}$ also im Theilpunkte

$$2 . 9 + 2 . 5 = 28.$$

Auf der Geraden $\nu\nu_{,}$ befindet sich der Punkt dagegen, falls eine Bewegung auf ihr allein angenommen würde, im Theilpunkt

$$1 . 5 = 5.$$

Beiden Bewegungen zu gleicher Zeit Genüge leistend, würde sich also in unserer Figur der bewegte Punkt da befinden, wo eine durch den Theilpunkt 28 parallel zu $\nu\nu_{,}$ und eine durch den Theilpunkt 5 parallel zu $\mu\mu_{,}$ gelegte Gerade sich durchschneiden, d. h. in M_2.

3. Aus diesen Erläuterungen ergiebt sich, dass es bei der Bestimmung eines gesuchten Ortes zuletzt darauf ankommt: durch einen bestimmten Theilpunkt auf $\mu\mu_{,}$ eine Parallele zu

$\nu\nu$, und einen bestimmten Theilpunkt auf $\nu\nu$, eine Parallele zu $\mu\mu$, zu legen und diese bis zu ihrem Durchschnitte zu verlängern. Denken wir uns diese Operation für alle Theilpunkte der einen wie der andern Geraden ausgeführt, so erhalten wir $17 . 17 = 289$ Durchschnittspunkte als die grösste Zahl, die überhaupt unter der Annahme, dass die Zeiteinheit in 32 gleiche Theile getheilt und demgemäss für jede zu ziehende Curve 32 Richtpunkte bestimmt werden sollen, möglich ist.

Ein solches Diagramm ist in Fig. 15, Taf. I dargestellt und zu gleicher Zeit ist in dasselbe eine Schwingungscurve gezeichnet, unter der Annahme, dass

$$m = 2$$
$$n = 1$$
$$\vartheta = \frac{2}{32}.$$

Der Annahme von ϑ gemäss folgt, dass der Anfangspunkt der Curve mit dem Theilpunkt 4 der Geraden $\mu\mu$, zusammenfällt. Gemäss der Annahme, dass $m = 2$ und $n = 1$ folgt weiter, dass jeder folgende Richtpunkt der zu zeichnenden Curve erhalten wird, wenn man auf $\mu\mu$, um 2 und von hier parallel zu $\nu\nu$, um 1 Theilpunkt fortrückt. Sind auf diese Weise 32 Punkte bestimmt, so zeichnet man mit freier Hand die ganze Curve mit Rücksicht auf die möglichst richtigen Krümmungsverhältnisse aus. Da wir bei den Schwingungscurven offenbar auch die Richtung unterscheiden müssen, in welcher der bewegte Punkt sie durchläuft, so möge dies durch einen Pfeil angedeutet werden, so dass wir nicht nöthig haben, Zahlenangaben neben den Curven zu machen. Das stumpfe Ende des Pfeils wird stets dem Punkte der Curve gegenüber stehen, welcher den Anfangspunkt der Bewegung bezeichnet.

Wenn man eine grosse Anzahl von Curven zu zeichnen hat, so thut man wohl, das Diagramm auf dünnem Messingbleche zu verzeichnen und an den Theilpunkten mit feinen Löchern zu durchbohren. Wird ein solches Blech auf das Papier gelegt, worauf die Curve gezeichnet werden soll, so kann man mittelst einer feinen Nadel durch die richtigen Löcher hindurch auf letzterem die nöthigen Bestimmungspunkte einstechen.

4. Die von Lissajous angegebene und im Obigen erläuterte Zeichnungsmethode ist jedoch nur dann zu empfehlen, wenn

der Winkel $\mu s \mu_{,} = \varphi$ durchweg denselben Werth behalten soll. Im obigen ist φ gleich 45^0 angenommen; wollte man nun ebenso Curven zeichnen für $\varphi = 90^0$, so müsste man ein zweites Diagramm anfertigen, kurz man müsste ebenso viele Diagramme besitzen, als der Winkel φ verschiedene Werthe annehmen soll. Die Anfertigung solcher Instrumente erfordert aber Aufmerksamkeit und Zeit, da 289 Löcher möglichst gleichmässig gebohrt werden müssen. Ich habe mir deshalb zur Anfertigung der Zeichnungen, die ich für gegenwärtigen Zweck nöthig hatte, einen andern Apparat ausgedacht, der nur 2mal 17 Löcher verlangt, und fernerhin wohl brauchbar ist, um Curven für einen beliebigen Winkel φ zu zeichnen. Der Apparat besteht aus zwei Messingblechen, von denen das eine dieselbe Form und Grösse besitzt wie die Fig. 16 *a*, Taf. II; das zweite wie die Fig. 16 *b*, Taf. II. An der vordern Kante des erstern sind die 17 Theilpunkte der Vibrationsbewegung $\mu\mu_{,}$ (um mich kurz so auszudrücken) als möglichst feine Einschnitte angegeben. Eben dies ist der Fall in Bezug auf die Vibrationsbewegung $\nu\nu_{,}$ bei dem Apparate Fig. 16 *b*, Taf. II, bei welchem, mit Ausnahme des zwischen *o* und *s* gelegenen Theilpunkts, der als ein Loch in der Wirklichkeit vorhanden zu denken, alle Theilpunkte theils am freien Rande $s\nu$, theils am freien Rande $o\nu_{,}$ als Einschnitte markirt worden sind. Will man nun mit diesem Apparate zeichnen, so trägt man zunächst neben *os*, (Fig. 16 *b*, Taf II) den Winkel φ an, indem man von *s* aus nach dem Rande des quadrantenförmigen Stücks des Blechs Fig. 16 *b*, Taf II mittelst einer Nadel Linien aufreisst, wie durch *ps*, *qs*, *rs* angedeutet ist, so dass die Winkel *pso*, *qso*, *rso* drei verschiedene Werthe von φ darstellen; dann nimmt man das Blech der Fig. 16 *a*, Taf. II zur Hand und sticht auf dem Blatte, worauf die Zeichnung entworfen werden soll, die 17 Theilpunkte der Vibrationsbewegung $\mu\mu_{,}$ ab, legt ferner das Blech der Fig. 16 *b*, Taf. II so auf das Zeichenblatt, dass der Punkt *s* mit dem Punkte der Bewegung $\mu\mu_{,}$ zusammenfällt, der eben, der gestellten Aufgabe gemäss, Anfangspunkt der Schwingungscurve werden muss und ferner so, dass der eine Schenkel des Winkels φ, der neben *os* liegt, also, wenn *pso* der Winkel φ wäre, der Schenkel *ps* in die Richtung der durch die Theilpunkte der Bewegung $\mu\mu_{,}$ angegebenen Geraden fällt. Wäre

nun z. B. $m = 4$ und $n = 3$, so müsste das Blech Fig. 16 *b*, Taf. II parallel seiner Anfangslage allemal um 4 Theilpunkte fortgerückt werden, während vom Punkte *s* aus auf der Punktreihe *vv*, von 3 zu 3 Punkten fortgeschritten wird, um so in dem zuletzt erhaltenen Punkte allemal mit einer Nadel einen Stich aufs Zeichenblatt zu machen.

Diese zuletzt beschriebene Zeichnungsmethode gewährt aber neben der grössern Einfachheit und Billigkeit der Apparate noch einen andern Vortheil vor der Lissajous'schen. Sobald nämlich die Zahlen *m* und *n* grösser werden wie 3, wird es immer schwieriger, bei Anwendung der Schablone Fig. 15, Taf. I auf ihr die aufeinander folgenden Punkte zu finden, und es kommt dann häufig vor, dass man wieder von vorne anfangen muss, ein Umstand, der bei einer grossen Zahl von Curven misslich ist; ferner wird bei wachsenden Werthen der Zahlen *m* und *n* auch das Zusammensuchen der auf dem Papier aufeinander folgenden Punkte schwieriger und man erhält beim Auszeichnen nicht selten falsche Curvenstücke. Alle diese Misstände werden fast ganz bei der Anwendung meiner Zeichnungsmethode vermieden. Denn einmal hat man hier statt 289 Punkten nur 2 . 17 vor Augen, so dass man sich beim Einstechen aufs Papier weit leichter orientiren kann; das andere Mal aber kann man, sobald die Curven complicirter werden, erst eine geringere Zahl von Stichen auf dem Papier anbringen, dann die Schablone aufheben und erst diese geringere Zahl von Punkten mit einander verbinden, hierauf wieder ein Stück der Curve vollenden u. s. f.

5. Die letztere Methode habe ich angewandt, um die Curven der Taf. V und Tab. VI darzustellen. Zunächst wurden sie in dem Maasstabe der Fig. 15, Taf. I gezeichnet, dann auf Pappe aufgezogen und photographirt, um sie sofort in dem Maasstabe der beiden Taf. V und VI zu erhalten. Die unter jeder Curve stehende Zahl bedeutet die Phasendifferenz; zur linken sind die Verhältnisse von $n : m$ angegeben, wobei sich die Zahl *m* auf die mit der Schrift parallel laufende Vibrationsbewegung, die Zahl *n* dagegen bei der Taf. VI auf die hierzu senkrechte, bei der Taf. V dagegen auf die unter 45° hierzu geneigte Bewegung bezieht. Vorläufig möge es nicht auffallen, dass bei der Taf. VI unter jeder Curve zwei Zahlenwerthe

stehen; die eingeklammerten Werthe lasse man zunächst unberücksichtigt.

Es entsteht aber nunmehr die Frage, ob die bisher erläuterten Methoden zur Darstellung von Schwingungscurven auch in dem extremen Falle noch angewandt werden können, für welchen der Winkel φ gleich Null, wobei also die beiden Punktreihen $\mu\mu_{\prime}$ und $\nu\nu_{\prime}$ in eine und dieselbe Gerade fallen und in Folge dessen auch die resultirende Bewegung durch eine Gerade versinnlicht wird, die jedoch, wie schon unter §. 2, 4 erwähnt wurde, auf ihrer ganzen Länge nicht gleichmässig erhellt erscheint, sondern worauf hellerere und dunklere Stellen zu erkennen sind, entsprechend der ungleichen Geschwindigkeit, mit der der leuchtende Punkt sie durchläuft.

Diese Erscheinungen, welche ein leuchtender, zweien in eine und dieselbe Gerade fallenden Vibrationsbewegungen zugleich folgender Punkt dem Auge darbietet, lassen sich nicht wohl in derselben Weise darstellen, wie die Erscheinungen, bei welchen der Winkel φ von 0 verschieden, aus dem einfachen Grunde, weil man hier in einer und derselben Geraden so viel Punkte bekommt, dass deren gehörige Aufeinanderfolge nur schwer zu erkennen ist. Statt dessen kann man zwei andere Zeichnungsmethoden anwenden. Die eine Manier besteht in Folgendem: Gesetzt, man wolle die Erscheinung, welche in Fig. 15, Taf. I für einen Winkel $\varphi = 45^0$ dargestellt ist, für $\varphi = 0$ darstellen, so zeichne man die Curve erst für einen kleinen Winkel φ, z. B. für $\varphi = 10^0$, wie es in Fig. 17 a, Taf. II geschehen ist. Würde nun der Winkel noch kleiner gedacht, so würde auch das allmälige Zusammenrücken und schliessliche Zusammenfallen der einzelnen Curventheile in Gedanken verfolgt werden können, und es ist klar, dass bei diesem Zusammenfallen in eine Gerade da die hellern Stellen auftreten werden, wo sie auch unmittelbar vorher bei einem, der Null möglichst nahe liegenden Winkel φ auftraten. Nun zeigt ein Blick auf die Fig. 15, Taf. I, dass der bewegte Punkt an den Stellen der Curve am langsamsten fortrückt, wo eben die stärksten Umbiegungen derselben stattfinden, und da dies allgemein bei Schwingungscurven der Fall ist (was sich auch durch den Calcul nachweisen lässt), so leuchtet ein, dass der Punkt auch für den Fall, dass $\varphi = 0$, an den Stellen der Ge-

raden sich am langsamsten bewegt, wo eine Umkehr in der Richtung seiner Bewegung stattfindet. Diese Stellen sind aber offenbar auch die Stellen der grössten Helligkeit, und wir werden unsere gesuchte Darstellung der Wahrheit möglichst getreu machen, wenn wir die Curve Fig. 17 *a*, Taf. II auf eine Gerade *AB* Fig. 17 *b*, Taf. II projiciren, hierauf die Umkehrstellen markiren und diese Stellen vor den übrigen in einer passenden Weise für das Auge hervorheben, etwa so, wie die Fig. 17 *b*, Taf. II zeigt. Aber man würde auch zu demselben Resultate schon gelangen, wenn man ohne Weiteres die Curven der Taf. V auf eine mit der Schrift parallele Gerade projicirte.

6. Die zweite Art der graphischen Darstellung der in Rede stehenden Erscheinungen beruht auf folgenden Principien. Wird ein Punkt von zweien in ein und dieselbe Gerade fallenden Vibrationsbewegungen zu gleicher Zeit angegriffen, so lässt sich bekanntermassen jede dieser Bewegungen unter dem Bilde der Sinus- oder Wellenlinie darstellen, und um die resultirende Bewegung in ähnlicher Weise graphisch zu versinnlichen, hat man nur nöthig, eine dritte Wellencurve zu construiren, deren Ordinaten die algebraischen Summen der je zugehörigen Ordinaten der componirenden Sinuslinien sind. Unsere Fig. 18. Taf. II möge dies näher versinnlichen: die Gerade, in welcher die beiden Vibrationsbewegungen mit den Elongationsweiten $s\mu = s\mu_1$ und $s\nu = s\nu_1$ zusammenfallen, werde durch *AB* vorgestellt. Angenommen, die Bewegung $\mu\mu_1$ sei doppelt so schnell als $\nu\nu_1$ und ausserdem wäre letztere um $\frac{2}{32}$ voraus, so stellen die gestrichelte und die punktirte Sinuslinie über der Abcissenaxe $s\tau$ die beiden Bewegungen einzeln vor, während die resultirende Bewegung durch die stetig ausgezogene Wellencurve versinnlicht wird. Um nun den Schwingungsvorgang, wie er auf der Geraden *AB* wirklich stattfindet, zu veranschaulichen, haben wir offenbar nur nöthig, die resultirende Wellencurve auf diese Gerade oder, wie es in der Figur geschehen, auf eine hierzu parallele Gerade *A'B'* zu projiciren, und in der Projection diejenigen Punkte anzugeben, wo bei der resultirenden Wellencurve die geometrischen Maxima und Minima liegen. Denn eben an diesen Stellen wird aus

denselben Gründen, wie unter 5 angegeben, die Helligkeit grösser erscheinen als an andern. Diese betreffenden Stellen sind in der Projection mit α_1', α_2', α_3', α_4' bezeichnet, und um die Helligkeit mehr hervorzuheben, wurde in ähnlicher Weise wie bei der Fig. 17 *b*, Taf. II verfahren.

Die an einem Beispiele gezeigten Operationen werden sich für andere Werthe von m, n, und ϑ wiederholen müssen und auf diese Weise entstand die Taf. VII. In jeder Horizontalreihe erblickt man zu allererst die graphische Darstellung der Bewegung durch eine aus zweien Sinuslinien resultirende dritte Wellencurve, welche letztere, da sie später in anderer Beziehung noch mehrfach in Betrachtung gezogen werden soll, einfach mit dem Namen einer Wellencurve zweiter Ordnung sich bezeichnen lässt; unter jeder dieser Curven befindet sich dann ihre Horizontalprojection, wodurch die in Wirklichkeit stattfindenden Erscheinungen möglichst getreu wiedergegeben sind. Bei den Projectionen sind weder Buchstaben noch Ziffern noch Pfeile gesetzt worden, weil man leicht aus der darüber befindlichen Wellencurve zweiter Ordnung die Richtung der Bewegung in jedem Punkte der Projection erkennen kann.

§. 5.

Besondere Bemerkungen über die Grösse ϑ. Verallgemeinerung der obigen Methoden.

1. Es bleibt nun noch die Beantwortung der Frage übrig: Welche Werthe der Phasendifferenz, also unserer Grösse ϑ, können überhaupt in den Zeichnungen dargestellt werden, unter der Voraussetzung, dass wir die Zeiteinheit in 32 gleiche Theile zerlegt denken, und demgemäss die Hilfszeichenapparate wie Schablonen und Diagramme einrichten wollen? Denn dass man mit Hilfe eines Diagramms Fig. 15, Taf. I nicht für jeden beliebigen Werth von ϑ die entsprechende Curve zeichnen kann, ist ohne Weiteres einleuchtend. Obwohl die geometrischen Eigenschaften der Schwingungscurven noch nicht näher besprochen worden sind, so ist doch soviel klar, dass, wenn (in Fig 19, Taf. II) $\mu\mu_1$ und $\nu\nu_1$ die Geraden vorstellen, worauf die beiden Bewegungen zugleich stattfinden sollen;

jede Schwingungscurve, m, n, φ und ϑ mögen Werthe haben wie sie wollen, die Gerade $\mu\mu_{\prime}$ sowohl wie $\nu\nu_{\prime}$ wenigstens in einem Punkte durchschneidet. Wählen wir also M als einen der 289 möglichen Theilpunkte des Diagramms, das zu den gegebenen Vibrationsbewegungen construirt werden müsste, zum Anfangspunkt der gemeinsamen Bewegung, so wird der bewegte Punkt $\mu\mu_{\prime}$ und $\nu\nu_{\prime}$ früher oder später beziehungsweise in einem Punkte x und y durcheilen. Gesetzt nun: der Punkt M läge vom Punkte s als dem Mittelpunkte der Bewegung in der Richtung $s\mu$ um sP gleich p und in der Richtung $s\nu$ um sQ gleich q Diagrammtheilchen entfernt, so wird die Schwingungscurve vom Punkte M in einer bestimmten Richtung ihren Anfang nehmen und es gehört zu dieser Curve eine Phasendifferenz, deren einer Theil sich auf die Bewegung $\mu\mu_{\prime}$ bezieht und gleich $\frac{p}{m.32}$, deren anderer auf $\nu\nu_{\prime}$ sich beziehender Theil gleich $\frac{q}{n.32}$ ist. Beginnt nun von M aus die Bewegung, so wird am Ende der Zeiteinheit der bewegte Punkt wieder nach M zurück gekehrt sein und, um den Punkt zu finden, wo er die Gerade $\mu\mu_{\prime}$ durchschneidet, wollen wir ihn im Sinne der Bewegung $\nu\nu_{\prime}$ auf der Curve um q Theilchen rückwärts wandern lassen. Ist dies geschehen, so hat er offenbar $q.\frac{m}{n}$ Theilchen im Sinne der Bewegung $\mu\mu_{\prime}$ zurückgelegt; im Anfang war er in diesem Sinne um p Theilchen von s entfernt, nun ist er um $q\frac{m}{n}$ zurückgeeilt, folglich befindet er sich nun von s entfernt um

$$p-q.\frac{m}{n}$$

Diagrammtheilchen. Ist der Punkt x auf der Geraden $\mu\mu_{\prime}$ der Punkt, der von s um diese Anzahl Theilchen entfernt liegt, so können wir ihn offenbar, ohne dass sich unsere Schwingungscurve ändert, statt des Punktes M zum Anfangspunkt der Bewegung machen, wodurch erreicht ist, dass sich nunmehr die Phasendifferenz nur auf die Bewegung $\mu\mu_{\prime}$ bezieht. Wie gross ist diese Phasendifferenz aber? $p-q\frac{n}{m}$ Diagrammtheilchen werden durcheilt in einer Zeit

$$\vartheta_{\mu}=\frac{p-q.\frac{m}{n}}{m.32};$$

d. h. es ist die Grösse ϑ_μ oder die Phasendifferenz gleich

$$\vartheta_\mu = \frac{pn-qm}{m.n.32},$$

wobei dem ϑ ein μ angehängt wurde, um anzudeuten, dass die Phasendifferenz nur der einen Bewegung angehört, während sie für die andere 0 ist. Um ebenso das ϑ_ν zu finden, hätten wir nur nöthig, von M aus den bewegten Punkt um p Theilchen im Sinne von $\mu\mu$, rückwärts wandern zu lassen; offenbar wäre er dann im Sinne der Bewegung $\nu\nu$, um $p\frac{n}{m}$ Theilchen zurückgeeilt und von s auf der Geraden $\nu\nu$, um $q-p\frac{n}{m}$ Theilchen entfernt. Daraus folgt, dass

$$\vartheta_\nu = \frac{q-p\frac{n}{m}}{n.32},$$

oder

$$\vartheta_\nu = \frac{mq-np}{m.n.32};$$

d. h. es ist

$$\vartheta_\mu = -\vartheta_\nu.$$

Wir wollen noch einige Bemerkungen an den Werth von ϑ_μ knüpfen, die sich in gleicher Weise für ϑ_ν wiederholen würden. Unsere Frage war: welchen Werth von ϑ, welche Grösse sich nur auf die Bewegung $\mu\mu$, bezog, können wir überhaupt mit einem Diagramm nach unserer Einrichtung darstellen. Da ϑ_μ diese Grösse ist, so wollen wir einfach das μ wieder weglassen, aber nicht vergessen, dass dann ϑ sich nur auf die Bewegung $\mu\mu$, bezieht. Da p und q von uns willkürlich aus der Zahl der 289 Theilpunkte herausgewählt werden können, so folgt, dass überhaupt keine andern Werthe für ϑ möglich sind als die, welche aus der rechten Seite der Gleichung

$$\vartheta = \frac{np-mq}{mn.32}$$

abgeleitet werden können. Sehen wir vom Werthe $\vartheta = 0$ ab und beachten, dass n, m, p und q ganze Zahlen sind, wobei p und q positiv oder negativ sein können, so folgt, dass der kleinste Werth von ϑ, der überhaupt mit unserer Schablone dargestellt werden kann, gleich

$$\frac{1}{m.n.32}.$$

Beachten wir ferner, dass p und q trotz der Zahl 289 dennoch alle Werthe von 0 bis $\pm\infty$ annehmen können (indem man ja auf der Geraden $\mu\mu$, wie $\nu\nu$, von s aus um eine beliebige Zahl Theilchen die Bewegung fortgeschritten denken kann), so folgt, dass es immer möglich ist, den Zähler des Bruchs auf der rechten Seite obiger Gleichung in eine beliebige positiv oder negative Zahl zu verwandeln. Bezeichnen wir diese mit L, so folgt, dass wir alle Curven darzustellen vermögen, deren Phasendifferenz

$$\vartheta = \frac{L}{m.n.32}.$$

Zugleich ist einleuchtend, dass, wenn eine solche Schaar von Curven gezeichnet wird für $L = 1, 2, 3 \ldots$, zwischen zweien nicht noch eine dritte eingeschaltet werden kann, da eben $\frac{1}{m.n.32}$ der kleinste Werth für ϑ ist.

Nehmen wir an, es wäre q gleich Null, so folgt

$$\vartheta = \frac{p}{m.32}.$$

Nehmen wir also nur einen Theilpunkt der Geraden $\mu\mu$, zum Anfangspunkt der Curve, so ist der kleinste Werth der Phasendifferenz, von 0 abgesehen,

$$\frac{1}{m.32}.$$

Erthält, während $q=0$ ist, das p alle möglichen Werthe, so lassen sich auf diese Weise nur Curven darstellen, für welche

$$\vartheta = \frac{L}{m.32}.$$

Nehmen wir endlich $p=0$, d. h. wählen wir nur einen Theilpunkt der Geraden $\nu\nu$, zum Anfangspunkt, so ist der kleinste Werth für ϑ, der möglich ist, $\frac{1}{n.32}$, und es folgt, dass man auf diese Weise nur Curven darstellen kann, für welche

$$\vartheta = \frac{L}{n.32}.$$

Bezeichnen wir die Anzahl Theilchen, in welche die Zeiteinheit getheilt gedacht werden soll, mit N, so kann man also mit einem Diagramm, was demgemäss eingerichtet ist, allgemein Curven darstellen, für welche

$$\vartheta = \frac{pn - qm}{m.n.N}.$$

Ein Blick auf die Zahlen der 5 obersten Reihen der Taf. V und VI lehrt, dass alle erhalten werden können aus dem Werthe

$$\vartheta = \frac{L}{m.32};$$

mithin konnten diese Reihen dadurch gezeichnet werden, dass man nur Theilpunkte der Geraden $\mu\mu_{\prime}$ zu Anfangspunkten wählte. Die Curven der sechsten Reihe aber durften, aus später anzugebenden Gründen, nicht nach der ebengenannten Formel für ϑ, sondern nach der Formel

$$\vartheta = \frac{L}{n.32}$$

gezeichnet werden, indem man aus $\frac{L}{m.32}$ z. B. nicht den Werth $\frac{1}{96}$ ableiten kann.

2. Wiewohl die Schwingungscurven, welche durch das Zusammenwirken von drei und mehr geradlinigen Vibrationsbewegungen erzeugt werden, in dieser Schrift keine genauere Berücksichtigung erfahren sollen, mit Ausnahme einzelner Fälle, so will ich doch noch zeigen, welche Methode man anwenden kann, um solche Curven zu zeichnen. Hierbei wähle ich ein ganz specielles Beispiel, indem ich glaube, dass, wenn die Methode an ihm erläutert worden ist, sie auch leicht in andern Fällen zur Anwendung gebracht werden kann. Dem zu Folge wollen wir die Curve zeichnen, welche entsteht beim Zusammenwirken dreier geradliniger Vibrationsbewegungen, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie 4 : 2 : 1, die ferner so gegen einander geneigt sind, dass die Bewegungen mit den Schwingungszahlen 4 und 1 unter einem rechten Winkel sich durchschneiden, während die Bewegung, deren Schwingungszahl 2, mit der von 4 zusammenfällt. Ferner werde angenommen, die Phasendifferenz zwischen den beiden äusseren Bewegungen sei $\frac{2}{32}$, auf die Bewegung 4 bezogen, dagegen die Phasendifferenz zwischen der Bewegung 2 und 1 gleich Null. Die Elongationsweiten von 4 und 1 seien beziehungsweise $s\mu = s\mu_{\prime}$ und $s\nu = s\nu_{\prime}$ in der Fig. 15, Taf. I, und es werde angenommen, dass auch die Elongationsweite der Bewegung 2 gleich $s\mu = s\mu_{\prime}$ sei. Nun sind alle Elemente für die Zeichnung der Curve gegeben. Die Zeichnung selbst kann in folgender Weise

bewerkstelligt werden. Man zeichnet sich zunächst die Schwingungscurve für die Schwingungszahlen 4 und 1, die Phasendifferenz $\frac{2}{32}$ und den Winkel φ gleich 90°. Diese Curve ist in Fig. 20, Taf. II als eine gestrichelte Curve sichtbar zugleich mit den für ihre Zeichnung nöthigen 32 Bestimmungspunkten, von denen aber, des bestimmten Werthes von ϑ wegen, je zwei zusammenfallen. Sie ist identisch mit der dritten Curve der vierten Horizontalreihe auf Taf. VI. Um nun in der verlangten Weise mit den beiden Bewegungen 4 und 1, deren Zusammenwirken durch die gestrichelte Curve dargestellt ist, die Bewegung mit der Schwingungszahl 2 zu verbinden, hat man offenbar nur nöthig, die Schablone Fig. 16 *a*, Taf. II zur Hand zu nehmen, sie parellel der Geraden $\mu\mu$, auf unserer Fig. 20, Taf. II zu verschieben, so dass der Punkt *s* der Schablone nach und nach mit den 32 Theilpunkten der gestrichelten Curve zusammenfällt, um jedesmal, wenn dies der Fall, mit einer Nadel oder einem Bleistift, von zwei zu zwei Theilpunkten auf der Schablone fortschreitend, die nöthigen 32 Punkte unserer zu zeichnenden Curve zu bestimmen. Auf diese Weise wurde die Curve, welche in der Fig. 20, Taf. II als ausgezogen erscheint, dargestellt.

Offenbar würde man auch zum gewünschten Ziele gelangen, wenn man erst zwei andere der drei gegebenen Bewegungen für sich und hiermit dann die dritte combinirt hätte; jedoch ist es nicht gleichgültig, welche der beiden Bewegungen man zuerst combinirt, da von der Einfachheit der hierdurch entstehenden Curve auch die weitere grössere oder geringere Leichtigkeit der als Endresultat gewünschten Zeichnung abhängt.

§. 6.

Vorläufige Betrachtungen über geometrische Eigenschaften und physikalische Bedeutung der hierher gehörigen Schwingungscurven.

1. Ein Blick auf die Tafeln V bis VII lehrt uns, dass die Formen der Schwingungscurven der Hauptsache nach abhängen von dem Verhältnis von *n* zu *m*, dass namentlich diese Formen um so mannigfaltiger werden, je schwieriger es wird, die Zeiteinheit, sei es in Gedanken mit Hilfe des Auges oder

durchs Gefühl mit Hilfe des Ohrs in n und gleichzeitig in m Theile zu theilen. In dieser Beziehung liefern die Zeichnungen von Schwingungscurven für das Auge das, was wir längst für das Ohr als bestehend annehmen: nämlich dass letzteres Organ ein Intervall um so angenehmer erkennt, je leichter es ihm fällt, zwei Schwingungszahlen neben einander zu unterscheiden. Wenn aber das Auge aus dem Anblick einer geometrischen Figur Schlüsse zieht, die in paralleler Weise auch das Ohr zu ziehen im Stande ist, so darf man erwarten, dass in solchen Fällen, wo dies letzterem Organe nicht gelingt, das erstere vielleicht die gewünschten Aufklärungen liefere. Töne und Tonverhältnisse in eigenthümlicher Weise gewissermassen sichtbar gemacht zu haben, das ist das Verdienst, welches Lissajous durch seine Arbeit sich erworben hat und würden weitere Versuche, die Schwingungscurven in der Wissenschaft und Praxis nutzbar zu machen, ihm nicht gelungen sein, so wäre darum jenes Verdienst nicht zu unterschätzen. Versuchen wir vorläufig durch die Anschauung allein einige Eigenschaften unserer Schwingungscurven kennen zu lernen.

Zunächst bemerken wir, dass für gewisse Werthe der Phasendifferenz in jeder Horizontalreihe unserer Tafeln die Curven eine einfachere Gestalt annehmen, indem Theile derselben, welche für benachbarte Werthe der betreffenden Phasendifferenz noch auseinander lagen, zusammenfallen. So z. B. erkennt man, wie in der zweiten Horizontalreihe der Taf. VI für $\vartheta = \frac{2}{16}$ die vorher complicirteren Figuren sich zu einer Curve gestalten, die, wie sich später herausstellen wird, eine Parabel ist; so erkennt man, wie in der ersten Reihe derselben Tafel die Ellipse als Bild des Einklangs für gewisse Werthe von ϑ in eine Gerade übergeht. Ich werde solche Curven im folgenden mit dem Namen »vereinfachte Curven« bezeichnen.

Beachten wir vorläufig nur die Taf. V und VI, so erkennen wir, dass, wenn, wie es bei diesen Tafeln der Fall ist, m die grössere Schwingungszahl ist, die vereinfachten Curven vom m^{ten}, alle übrigen dagegen vom $2m^{ten}$ Grade sind; daraus folgt, dass umgekehrt die Schwingungszahl m unmittelbar aus dem Grade der Curve erkannt werden kann.

Den Lehren des vorigen §. zu Folge muss der bewegte

Punkt, der von einem willkürlich angenommenen Punkte irgend einer Schwingungscurve aus seine Bewegung beginnt, nach Verlauf der Zeiteinheit wieder zum Anfangspunkt der Bewegung zurückkehren, um so in ganz gleicher Weise die durchlaufene Bahn zum zweitenmale etc. zu durchlaufen. Sehen wir demnach eine solche Curve als das Resultat der Bewegung eines Punktes an, so folgt, dass sämmtliche Curven geschlossene Curven sind, d. h. Curven, die mit ihrem Umfange einen bestimmten Flächenraum einschliessen, der aber bei gewissen vereinfachten Curven gleich Null sein kann.

2. Denken wir uns die Geraden $\mu\mu_1$ und $\nu\nu_1$ als Axen eines ebenen Coordinatenkreuzes, so werden wir folgende Gesetzmässigkeiten aus dem Anblick der Taf. V und VI erkennen können:

a. Sämmtliche Curven der Taf. V zeigen weder in Beziehung der einen noch der andern Axe eine Symmetrie, ja es giebt selbst, mit Ausnahme bei der ersten Reihe, keine einzige Gerade, zu welcher eine der Curven eine symmetrische Lage besässe *).

b. Die Curven der Taf. VI dagegen sind alle symmetrisch zur x Axe, sobald n ungerad und m gerad; symmetrisch zur y Axe, sobald n gerad und m ungerad; in beiden Fällen giebt es auch Curven, die für gewisse Werthe von ϑ eine Symmetrie zu den beiden Axen besitzen; ist n und m ungerad, so giebt

*) Nur in speciellen Fällen kann es sich ereignen, dass in der ersten Reihe für gewisse Werthe von ϑ die Ellipsen und Geraden symmetrisch zur Axe $\mu\mu_1$ liegen. Dann nämlich, wenn Fig. 15, Taf. I ein Theilpunkt auf der Strecke AB und natürlich auch dann auf CD existirt, der gerade senkrecht über s liegt. Wird ein solcher Punkt zum Anfangspunkt der Ellipse gewählt, so wird diese in ihm offenbar von AB bzw. CD berührt; die Verbindungslinie der beiden diametral einander gegenüberliegenden Punkte geht durch den Mittelpunkt s und steht senkrecht auf den Tangenten AB und CD, sie muss demnach zugleich eine Axe der Ellipse sein. Steht gerade der Punkt B senkrecht über s, so liefert die Zeichnung eine auf $\mu\mu_1$ senkrechte und in s halbirte Gerade. Was hier in Bezug einer zur Geraden $\mu\mu_1$ stattfindenden Symmetrie bemerkt wurde, gilt ebenso für die Gerade $\nu\nu_1$ falls auf AD und BC zwei gegenüberliegende Punkte existiren, die zugleich senkrecht über s liegen. Bei den hier gemachten Schlüssen wird jedoch das, was später erst streng bewiesen werden soll, im Voraus angenommen, nämlich dass wir es hier überhaupt mit einer Ellipse zu thun haben, und dass der Punkt s deren Mittelpunkt ist.

es nur für bestimmte Werthe von ϑ Symmetrien, aber dann gleichzeitig zu beiden Axen; mit Ausnahme der Curven der ersten Reihe giebt es für die einzelnen Curven ausser den Axen keine andere Geraden, welche jene symmetrisch theilten.

c. Ist n und m ungerad, so wird man auf beiden Tafeln nur solchen Curven begegnen, die einen Mittelpunkt besitzen.

Vergleicht man die Curven einer Reihe mit einander, so wird man auf der Tafel V, sobald n und m ungerad, fünf verschiedene Formen treffen, die nach ihrer ersten Aufeinanderfolge für andere Werthe von ϑ sich dann in bestimmter Ordnung und Lage wiederholen. Für alle übrigen Curvenreihen der Taf. V, sowie überhaupt der Taf. VI giebt es dagegen nur drei wesentlich verschiedene Formen, welche für bestimmte Werthe von ϑ immer wiederkehren. Diese Erscheinungen werden im zweiten Theile dieser Arbeit eine ausführliche Erörterung erfahren.

Denken wir uns die Curven der Taf. V auf die x Axe projicirt, mit Rücksicht auf das, was unter 5. und 6. des §. 4 auseinandergesetzt wurde, so können die Betrachtungen, welche an diesen Projectionen über Symmetrieverhältnisse und Wiederholung gewisser Formen sich anstellen lassen, unmittelbar auch gelten von den Projectionen der Curven auf Taf. VII.

3. Da jede Schwingungscurve entsteht durch zwei gleichzeitig auftretende geradlinige Vibrationsbewegungen mit gemeinsamem Vibrationscentrum, so folgt, dass die Curven weder vollständig auf einer Seite von $\mu\mu_{,}$ noch vollständig auf einer Seite von $\nu\nu_{,}$ liegen können, sondern dass nothwendig jede der Geraden $\mu\mu_{,}$ und $\nu\nu_{,}$ eine jede Curve durchschneiden muss. Da ferner bei einer geradlinigen Vibrationsbewegung der schwingende Punkt während der Dauer einer Schwingung auf der einen und andern Seite vom Mittelpunkt der Bewegung das Maximum der Elongation erreicht, so folgt, dass auch bei der aus zweien geradlinigen Vibrationsbewegungen resultirenden Bewegung der Punkt beiderseits von $\mu\mu_{,}$ und $\nu\nu_{,}$ beziehungsweise n und $m$mal im Maximum sich entfernt, oder mit andern Worten, dass die Schwingungscurven parallel der Bewegung $\mu\mu_{,}$, beiderseits von ihr, $n$mal, und parallel der Bewegung $\nu\nu_{,}$ beiderseits von ihr, $m$mal ein Maximum erreichen. Betrachtet man die Geraden $\mu\mu_{,}$ und $\nu\nu_{,}$ als x und y Axen

eines ebenen Coordinatensystems, so kann man auch kurz sagen, sämmtliche Schwingungscurven besitzen parallel der x Axe n, parallel der y Axe m Maxima und Minima. Hierbei ist aber wohl zu berücksichtigen, dass Maxima und Minima, welche mit Rücksicht auf die Zeit verschieden sind, in räumlicher Beziehung identisch sein können. In der That lehrt ein Blick auf die Taf. V und VI, dass das Auftreten der vereinfachten Curven zu gleicher Zeit mit einem Zusammenfallen zweier Maxima oder Minima oder einem Maximum und einem Minimum verbunden ist, welche bei den angrenzenden Werthen von ϑ zunächst neben einander lagen. Geht hierbei ein Maximum und Minimum zusammen, so entsteht an dieser Stelle stets ein Rückkehrpunkt. Alles dies zusammengefasst, sind wir zu einem Resultate gelangt, dass sich in folgendem Satze aussprechen lässt:

»Gehen zwei geradlinige Vibrationsbewegungen zu »einer resultirenden Bewegung zusammen, und sind die »Schwingungszahlen jener unbekannt, so lassen sich letz»tere aus der Zahl der Maxima oder Minima der bei der »Bewegung entstehenden Curve erkennen, indem die An»zahl der Maxima oder Minima, welche parallel der einen »Bewegung liegen, genau dieselbe ist, wie die Anzahl der »Schwingungen, welche der anderen Bewegung ange»hören.«

Es folgt ferner aus dem Vorhergehenden, dass sämmtliche Curven der Taf. V und VI in ein Parallelogramm eingeschrieben zu liegen kommen, dessen Seiten durch die Endpunkte der geradlinigen Vibrationsbewegungen und parallel zu letzteren laufen. Ebenso leuchtet noch ein, dass mit Rücksicht auf die Zeit, welche der bewegliche Punkt beim Durchlaufen der Curve gebraucht, zwei unmittelbar auf einanderfolgende Durchschnitte mit der Geraden $\mu\mu_{\prime}$ und $\nu\nu_{\prime}$ bzw. um $\frac{1}{2n}$ und $\frac{1}{2m}$ der der Zeiteinheit auseinander liegen; dass ferner von dreien auf einanderfolgenden Durchschnitten, welche die Curve mit irgend einer parallel zu $\mu\mu_{\prime}$ und $\nu\nu_{\prime}$ gelegten Geraden bilden, die zeitlich entferntesten beiden Durchschnitte bzw. um $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ der Zeiteinheit von einander entfernt sind.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass der Grad, die An-

zahl der Maxima und Minima, die Symmetrieverhältnisse (mit Ausnahme der Fälle, welche in der letzten Note besprochen), die gesetzmässige Wiederholung derselben Curve für verschiedene Werthe von ϑ, unabhängig sind von dem relativen Verhältniss der Elongationsweiten $s\mu = s\mu_{,}$ und $s\nu = s\nu_{,}$ und dass dies nur ein gleichmässiges oder mehr oder weniger ungleichmässiges Ausdehnen der Curve nach der einen oder anderen Richtung zur Folge hat. Da jedoch unter den Schwingungscurven, die wir im Folgenden kennen lernen werden, das relative Verhältnis der Elongationsweiten wesentlich andere Ge-Gestalten erzeugen kann, so möge obige Bemerkung hier schon Beachtung finden.

Drittes Capitel.

Optisch-mechanische und graphische Darstellung derjenigen Schwingungscurven, welche durch das Zusammenwirken einer geradlinigen und einer elliptischen Vibrationsbewegung erzeugt werden.

---

§. 7.

Allgemeine Betrachtungen.

1. In der Fig. 21, Taf. II ist durch den Mittelpunkt m einer Ellipse, deren Axen $\alpha\alpha_{,}$ und $\beta\beta_{,}$ heissen, eine Gerade $\mu\mu_{,}$ so gelegt, dass deren Strecke in m halbirt wird. Dieser Punkt m soll nun zweien Herren dienen: nämlich eine Vibrationsbewegung auf der, mit den Halbaxen $m\alpha$ und $m\beta$ beschriebenen, Ellipse ausführen, zu gleicher Zeit aber auch einer geradlinigen Vibrationsbewegung Folge leisten, welche mit der Elongationsweite $m\mu = m\mu_{,}$ auf der Geraden $\mu\mu_{,}$ stattfindend zu denken ist. Bei der Erfüllung dieser beiden Bedingungen wird der bewegte Punkt eine Bahn beschreiben, welche sowohl von der Geraden $\mu\mu_{,}$, wie auch von der gegebenen Ellipse abweicht, und deren Form ohne Zweifel von folgenden Umständen abhängig ist:

a) von einer Zahl m, welche angiebt, wie viel Schwingungen in einer gewissen Zeit auf der Geraden $\mu\mu_{,}$ stattfinden sollen, oder kurz von der Schwingungszahl der geradlinigen Vibrationsbewegung;

b) von einer Zahl n oder der Schwingungszahl der elliptischen Vibrationsbewegung;

c) von einer Grösse ϑ, welche als Phasendifferenz, bezogen auf die geradlinige Vibrationsbewegung $\mu\mu_{,}$, gedacht werden kann;

d) von einem Winkel φ, der zwischen $m\mu$ und $m\alpha$ liegt; endlich

e) von der absoluten, wie relativen Grösse der Strecken $m\alpha$, $m\beta$ und $m\mu$.

2. Was die Zahlen m und und n anlangt, so setzen wir sie als ganze Zahlen voraus, wodurch ja die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, denn wenn z. B. in einer gewissen Zeit auf der Ellipse $\frac{2}{3}$ Schwingungen erfolgen sollen, während auf der Geraden $\frac{1}{2}$ Schwingungen in derselben Zeit stattfinden, so werden in der sechsfachen Zeit 4 elliptische Bewegungen auf 3 geradlinige kommen, so dass wir also durch geeignete Wahl einer andern Zeiteinheit statt der gebrochenen Schwingungszahlen ganze erhalten haben, was offenbar unter allen Umständen zu erreichen ist*). Wie nun aber diese Zahlen m und n auch heissen, sie liefern zwei Gruppen von Curven, nämlich eine, bei welcher m grösser als n und eine, wobei umgekehrt m kleiner als n. Legen wir z. B. der Zahl m den Werth 2, der Zahl n den Werth 1 bei, so würde eine Curve zum Vorschein kommen, die verschieden ist von jener, welche resultirt für $m = 1$ und $n=2$. Während wir also in den beiden vorigen Capiteln nur e i n e Gruppe von Schwingungscurven bei der Combination zweier geradlinigen Vibrationsbewegungen erhielten, haben wir es hier mit zweien zu thun, deren Eigenschaften wir bald kennen lernen werden.

3. Es fragt sich, ob diese Arten von Bewegungen, wie wir sie hier vorausgesetzt haben, auch in Wirklichkeit auftreten und sich etwa auch leicht in der einen oder andern Weise vor dem Auge darstellen lassen. Gesetzt, eine Saite liesse ihren Grundton und zu gleicher Zeit den zweiten Partialton oder die Octave des Grundtons erklingen, so kann sie hierbei schon eine mannigfaltige Art von Formen annehmen. Sie kann so schwingen, dass der Grundton durch Schwingungen erzeugt wird, die an und für sich in einer Ebene etwa in einer Ver-

---

*) Diese Bemerkung gilt auch für das Frühere.

ticalebene vor sich gehen, wenn die Saite als horizontal liegend gedacht wird; gesellt sich nun zu dieser Schwingung noch die, welche den zweiten Partialton erzeugt, und zwar in einer Ebene, die unter 90° gegen erstere geneigt ist, so nimmt die Saite während der Bewegung eine Gestalt an, so, dass jeder Punkt von ihr eine Curve beschreibt, deren Form der zweiten Reihe der Taf. VI angehört. Es kann aber auch so kommen, dass die Schwingungen, welche den Grundton für sich erzeugen würden, elliptisch oder kreisförmig sind und dass hierzu ebene Schwingungen des zweiten Partialtons sich gesellen. Dann beschreibt jeder Punkt der Saite eine Curve, die der zweiten Reihe der Taf. VIII angehört. Es kann ferner geschehen, dass die Schwingungen des Grundtons ebene sind, während die der Octave elliptisch oder kreisförmig sind; dann erhalten wir in der Bewegung der Saitenpunkte Curven, welche der zweiten Reihe der Taf. IX angehören. Wir werden später Gelegenheit haben, diese eigenthümliche Art der Saitenschwingungen näher kennen zu lernen. Man kann mit Leichtigkeit eine Kugel, welche an einem Faden aufgehangen ist, in geradlinige, kreisförmige oder elliptische Bewegung versetzen. Hängt man unten an diese Kugel eine zweite an und hält erstere fest, so kann man letzterer die eben genannten Bewegungen ertheilen. Lässt man nun, während die unterste Kugel geradlinige Schwingungen ausführt, die obere elliptische vollbringen, so beschreibt erstere eine Kurve, die einer von den jetzt betrachteten beiden Gruppen angehört. Diese beiden Beispiele zeigen demnach, dass in der That die Curven, welche wir hier voraussetzen, in Wirklichkeit bei den schwingenden Saiten erzeugt werden können, dass man andererseits auch Mittel besitzt, sie willkürlich vor dem Auge beschreiben zu lassen. In letzterer Beziehung wollen wir sofort eine einfache und bequeme Einrichtung näher kennen lernen.

§. 8.

Des Verfassers Methode, die hierher gehörenden Curven in optisch-mechanischer Weise darzustellen.

1. Die Lissajous'sche Methode, mit Hilfe zweier Stimmgabeln eine Gruppe von Schwingungscurven darzustellen, deren

Wesen wir im vorigen Capitel bereits kennen lernten, liesse sich so erweitern, dass man auch unsere jetzigen Curven erzeugen könnte. Zu dem Ende wäre es nöthig, drei Stimmgabeln, mit Spiegelchen armirt, in gehöriger Weise zusammen zu stellen. Zwei davon müssten ein für allemal im Einklange stehen und unter rechten Winkeln, wie wir im §. 2, 2. näher dargethan haben, gegen einander aufgestellt sein. Das Strahlenbündel, welches auf die erste, von da auf die zweite und von hier ins Auge des Beobachters gelangt, erzeugt in letzterem, wie wir wissen, die erste Reihe der Curven auf Taf. VI, also im Allgemeinen Ellipsen. Lassen wir aber das Strahlenbündel, bevor es ins Auge gelangt, erst auf eine dritte Gabel fallen, und von dem Spiegelchen letzterer erst ins Auge, so ist einleuchtend, wie nun eine Schwingungscurve erzeugt wird durch das Zusammenwirken einer elliptischen und einer geradlinigen Bewegung, vorausgesetzt, dass die Phasendifferenz bei den Unisonogabeln nicht etwa so gross ist, dass die Ellipse in eine Gerade übergeht.

2. Diese Art der Darstellung ist jedoch eine complicirte. Am einfachsten ist die Methode anzuwenden, welche in einer Beziehung schon unter §. 3, 2. erläutert wurde. In der Fig. 12, Taf I ist die Klemme K bestimmt, um eine Stahllamelle in ihr festzuklemmen und dieselbe Bestimmung hatte auch die kleine Klemme k mit Rücksicht auf ein kleineres Stahllamellchen. Diese obere Klemme k kann aber auch ein kleines cylindrisches Stäbchen festklemmen, welches an seinem oberen Ende gerade so wie das Lamellchen l mit einem vergoldeten Messingknöpfchen versehen ist, so dass bei der Bewegung vor den Augen des Beobachters eine im reflectirten Tages- oder Sonnenlichte erglänzende Curve beschrieben wird. Was sind dies aber für Curven? Der Stab L macht ebene Schwingungen und mit ihm auch $k+l$, Fig. 22, Taf. II. Das cylindrische Stäbchen l, aber kann mit Leichtigkeit für sich in elliptische Schwingungen versetzt werden und leitet man diese gleichzeitig ein: die ebenen des ganzen Systems und die elliptischen von l, so resultirt eine Reihe von Curven, welche den unter §. 7, 1. bezeichneten Charakter tragen. Je nachdem man das Stäbchen l, oder L oder auch beide verlängert oder verkürzt, kann man das Verhältnis von $m:n$ in bestimmter Weise ändern.

3. Denselben Zweck erreicht man jedoch auch in einer andern Weise. Die Fig. 12, Taf. I zeigt an der obern Fläche von K das obere Ende einer Falze, welche K von oben nach unten senkrecht durchsetzt. In diese Falze kann statt der Lamelle L ein etwa $^1/_2$ Lin. dicker cylindrischer Stahlstab eingesteckt und festgeschraubt werden. Setzen wir auf diesen oben die Klemme k mit dem Stahllamellchen l, so leuchtet ein, dass mit Leichtigkeit der Stab L_1, Fig. 23, Taf. II, und mit ihm das ganze System in elliptische Schwingungen versetzt werden kann, während gleichzeitig für sich das Lamellchen l ebene Schwingungen ausführt, so dass das Endknöpfchen von letzteren ebenfalls Curven beschreibt, von der Art, wie wir sie hier wünschen.

4. Wir haben oben gesehen, wie zwei Gruppen von Curven zum Vorschein kommen müssen, die eine für den Fall, dass $m > n$, die andere für den Fall, dass $m < n$. Wir sind nun im Stande, sowohl mit Hilfe der Einrichtung wie Fig. 22, Taf. II, als auch Fig. 23, Taf. II dass m sowohl grösser wie kleiner als n zu machen. In der Natur der Sache liegt es jedoch, dass für den Fall

$$m > n$$

die Einrichtung von Fig. 23, Taf. II für den Fall

$$m < n$$

dagegen die Einrichtung von Fig. 22, Taf. II benutzt wird.

Die Einrichtung eines solchen Kaleidophons, das ich bereits früher beschrieben habe, besteht also in der zweckmässigen Verbindung zweier Stäbe, welche entweder beide lamellenförmig sind, oder von denen nur der eine diese Eigenschaft besitzt, während der andere cylinderisch geformt ist. Bei allen diesen Einrichtungen wird es jedoch dem Leser wie dem Beobachter nicht entgehen, dass die Curven, welche das leuchtende Knöpfchen beschreibt, meistens anderer Natur sind als diejenigen, welche wir eigentlich erzeugen wollten. Bei der Einrichtung nach der Fig. 12, Taf. I können wir φ constant machen, aber das Verhältnis von $m:n$ lässt sich nur näherungsweise erreichen; es ändert sich während der Bewegung, was mit denselben Veränderungen im Aussehen der Curven verbunden ist, als hätten wir bei vollständig richtigem Einstellen des Verhältnisses von $m:n$ die Phasendifferenz ϑ nach und nach

geändert. Die Curven bieten demnach kein constantes Ansehen, sondern sie durchlaufen in gesetzmässiger Weise eine Reihe von Formen. Noch mehr ist dieses aber der Fall, wenn man einen cylindrischen und einen ebenen Stab verbindet, weil nunmehr sich nicht nur fortwährend die Phasendifferenz, sondern auch der im §. 7, 1. bezeichnete Winkel φ ändert. Denn wir wissen Alle, dass ein Strickstock, der an einem Ende eingeklemmt und aus der Gleichgewichtslage herausgebracht wird, mit dem anderen Endpunkte eine Ellipse beschreibt, deren Axen der Grösse und Lage nach sich ändern, die sogar in bestimmten Momenten in eine gerade Linie übergehen kann. Unter §. 7, 1. haben wir aber angenommen, und diese Annahme wird auch im Folgenden immer festgehalten werden, dass die Ellipse eine constante Gestalt besitze, dass auch der Winkel φ beständig derselbe sein solle, woraus hervorgeht, dass in dieser idealen Weise durch die Einrichtung des Kaleidophons die Versuche nicht angestellt werden können. Letztere fallen viel mannigfacher aus, indem gleichzeitig eine Aenderung von φ, von $m\alpha$, $m\beta$, $m\mu$ und endlich von ϑ vor unseren Augen sich vollzieht. Diese Aenderungen können jedoch nach Willkür bei zu rascher Aufeinanderfolge verzögert werden, so dass das Auge trotz der grossen Mannigfaltigkeit der Erscheinungen im Stande ist, in einem bestimmten Momente jene Form zu erkennen, welche bestimmten Voraussetzungen Genüge leistet.

§. 9.

Graphische Darstellung der hierher gehörigen Schwingungscurven.

1. Stellt a in der Fig. 24, Taf. II den Anfangspunkt der geradlinigen b den Anfangspunkt der elliptischen Vibrationsbewegung vor, so ist es leicht, den Anfangspunkt der gemeinsamen Bewegung zu bestimmen. Denn offenbar hat man nur nöthig, die Gerade $\mu\mu$, parallel mit sich selbst so zu verschieben, bis der Punkt m auf dem Punkt b zu liegen kommt, wodurch der Punkt a nun den Ort 0 als den verlangten Anfangsort der gemeinsamen Bewegung einnimmt. Würde im ersten Zeitmomente der gemeinsamen Bewegung der bewegte Punkt von a nach a_1 und gleichzeitig auf der Ellipse von b nach b_1 versetzt, so

würde er am Ende des ersten Zeittheilchens offenbar nach *1* gelangt sein, ein Ort, welcher erhalten wird, sobald man die Gerade $\mu\mu_{\prime}$ parallel mit sich selbst so verschiebt, dass m auf $b_{\prime}$ zu liegen kommt und $a_{\prime}$ nach *1* gelangt. Will man also eine Anzahl Bestimmungspunkte für irgend eine zu zeichnende Curve haben, so hat man nur nöthig, die geradlinige Vibrationsstrecke $\mu\mu_{\prime}$ parallel mit sich selbst zu verschieben, so dass der Punkt m auf dem Umfang der Ellipse eine ganz bestimmte Stelle einnimmt, und von dieser Stelle aus auf der Strecke $\mu\mu_{\prime}$ einen Punkt zu suchen, auf den der bewegte Punkt zu liegen käme, wenn die geradlinige Bewegung allein da wäre.

Man sieht aber leicht ein, dass derselbe Zweck auch dadurch erreicht wird, dass man die Gerade $\mu\mu_{\prime}$ fest liegen lässt und längs ihr die Ellipse parallel mit sich selbst so verschiebt, dass ihr Mittelpunkt einmal die Lage a, sowie der Punkt b die Lage *0*, das anderemal die Lage $a_{\prime}$, sowie der Punkt b die Lage *1* erhält. Also eine Parallelverschiebung von $\mu\mu_{\prime}$ bei fester Ellipse oder eine Parallelverschiebung der Ellipse bei fester Geraden $\mu\mu_{\prime}$ führt zum Ziele, und es fragt sich nur, welches Verfahren ist das zweckmässigere?

2. Um wirklich in bequemer Weise und mit hinreichender Genauigkeit unsere Curven zu zeichnen, verfahren wir ganz ähnlich, wie im zweiten Capitel für eine andere Curvengattung dargethan wurde. Wir verschaffen uns nämlich zwei Schablonen. Die eine *ABCD* Fig. 25 *a*, Taf. II enthält 32 Bestimmungspunkte, welche liegen auf dem Umfange der elliptischen Bahn; die andere *EFGH* Fig. 25 *b*, Taf. II enthält 17 Bestimmungspunkte der geradlinigen Vibrationsbewegung $\mu\mu_{\prime}$, von denen aber jeder, wie wir wissen, zweien Momenten der Bewegung entspricht, so dass wir auch für jedes 32tel der geradlinigen Bewegung sofort den Ort kennen, welchen der bewegte Punkt einzunehmen hat. Die Art und Weise, wie diese Punkte für die Ellipse wie für die Gerade gefunden werden, bedarf keiner Auseinandersetzung. Diese beiden Schablonen werden am besten von dünnem Messingbleche oder auch wohl von dünnem und steifem Cartonpapier angefertigt.

3. Ich habe es für hinreichend gehalten, nur solche Curven zu zeichnen, für welche der Winkel φ gleich Null, d. h. die Gerade $\mu\mu_{\prime}$ mit der Axe $\alpha\alpha_{\prime}$ zusammenfällt. Für diesen

Fall ist es nun am einfachsten, die Gerade $\mu\mu_{,}$ parallel mit sich selbst bei feststehender Ellipse zu verschieben. Die Bewegung auf der Ellipse ist stets vom α aus in der Richtung $\alpha\beta\alpha_{,}\beta_{,}\alpha$ .... zu denken, ebenso auf der Geraden in der Richtung $m\mu m\mu_{,}m$ ..., und diesen Annahmen gemäss wollen wir zwei Aufgaben lösen: nämlich zunächst eine Curve zeichnen für:

$$m = 2$$
$$n = 1$$
$$\vartheta = \frac{4}{32}.$$

Wir nehmen die Schablone $ABCD$, legen dieselbe auf ein Blatt Papier und stechen mit einer Nadel die Ellipsenpunkte ein; ist dieses geschehen, so nehmen wir die Schablone $EFGH$ und bringen sie zunächst in die Lage von EF, Fig. 26, Taf. II. Da nun $\vartheta = \frac{4}{32}$ und $m = 2$ ist, so folgt nach den Lehren des vorigen Capitels §. 4, 1., dass wir im 8ten Theilpunkt der Geraden $\mu\mu_{,}$ einstechen müssen, um den Anfangspunkt der zu zeichnenden Curve zu erhalten. Er ist in der Fig. 26, Taf. II mit *0* bezeichnet. Um einen weiteren Punkt zu erhalten, verschieben wir EF soweit, bis der Punkt m auf den nächst an α in der Richtung der eben bezeichneten Bewegung zu liegen kommt; da aber in dieser zweiten Lage EF der ursprünglichen parallel sein muss, so hat man nur dafür zu sorgen, dass die Kante EF lang genug ist, um bei jeder Lage zwei Punkte treffen zu können, die wie die Punkte α und $\alpha_{,}$ oder (1) und (15) u. s. f. liegen; man rückt also, um den weitern Bestimmungspunkt der Curve zu finden, sobald m an (1) liegt, EF an den Punkt (15) und sticht dann auf EF vom 8ten Punkt rückwärts um 2 Punkte ein. So geht es weiter: immer um einen Punkt auf der Ellipse fortgerückt und dann um 2 auf der Geraden. Auf diese Weise erhält man die Punkte, welche in unserer Fig. 26, Taf. II mit *1*, *2*, *3*, *4* .... bezeichnet sind, und um die Curve wirklich zu erhalten, verbindet man diese Punkte mit Rücksicht auf die möglichst richtigen Krümmungsverhältnisse. Der beigezeichnete Pfeil deutet die Richtung der Bewegung auf der Schwingungscurve an.

Sollte ferner eine Schwingungscurve gezeichnet werden für:

$$m = 1$$
$$n = 2$$
$$\vartheta = \frac{1}{4} = \frac{8}{32},$$

so müssen wir gemäss den Werthen für m und n auf der Ellipse immer um 2 Punkte fortrücken und zugleich auf EF um einen. Da $m = 1$ und $\vartheta = \frac{8}{32}$, so wird der Anfangspunkt gefunden, wenn wir bei der Lage von EF Fig. 27, Taf. II im 8ten Punkte von EF einstechen. Der weitere Fortgang ist ersichtlich.

4. In dem Maasstabe der Figuren 26 und 27, Taf II wurden nun zunächst für dieselben Werthe von ϑ wie bei den Curven des zweiten Capitels und dieselben Verhältnisse von m und n eine Reihe von Curven gezeichnet, auf Pappe aufgeklebt und auf photographischem Wege verkleinert, wie die Taf. VIII und Taf. IX zeigen, zu deren weiterem Verständnis für jetzt nichts hinzuzufügen ist. Es möge jedoch hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass alle Betrachtungen, die wir §. 5, 1 anstellten, auch für unseren jetzigen Fall giltig sind. Ferner ist einleuchtend, dass unser jetziger Paragraph eigentlich nur eine speciellere Ausführung dessen enthält, was bereits im §. 5, 2 in allgemeiner Weise angedeutet wurde.

§. 10.

Vorläufige Betrachtungen über geometrische Eigenschaften und physikalische Bedeutung der hierher gehörigen Schwingungscurven.

1. Ein Blick auf die Taf. VIII und IX lehrt, wie auch bei der jetzigen Gattung von Schwingungscurven ein einfacheres Verhältnis von $m : n$ durch einfachere geometrische Formen sich anzeigt. Während wir aber bei den Curven der Taf. V und VI sogenannte vereinfachte Curven antrafen, bemerken wir jetzt diese nicht, und nur unter ganz besonderen Umständen wäre es denkbar, dass solche Curven aufträten. Für $\vartheta = \frac{6}{8}$ erblicken wir in der ersten Horizontalreihe der Taf. VIII eine Ellipse als Schwingungscurve; unter der bestimmten Voraussetzung aber, dass $m\alpha = m\mu$, würde für diesen Werth von ϑ eine verticale Gerade zum Vorschein kommen. Sehen wir von solchen besonderen Annahmen ab, so stellen sich alle Curven der Taf. VIII,

sobald man dieselben auf ein Parallelcoordinatensystem bezieht, als vom $2m^{ten}$, alle Curven der Taf. IX dagegen vom $2n^{ten}$ Grade heraus.

2. Denken wir uns die Axen der Ellipse, welche die eine Componente bildet, als Coordinatenaxen eines rechtwinkligen Coordinatenkreuzes $m\alpha$ als x, $m\beta$ als y Axe, so erkennen wir folgende Gesetzmässigkeiten:

a) Im Allgemeinen zeigen weder die Curven der Taf. VIII noch der Taf. IX eine Symmetrie bezüglich einer der Coordinatenaxen, sondern diese tritt nur auf für bestimmte Werthe von ϑ. Eine Symmetrie gleichzeitig zu beiden Axen, wie wir sie bei den Curven der Taf. V und VI für bestimmte Werthe von ϑ in jeder Horizontalreihe fanden, tritt hier nur für bestimmte ϑ in der ersten Horizontalreihe auf.

b) Wie bei den Curven des vorigen Capitels zeigt sich auch hier, dass für alle Werthe von ϑ, sobald m und n gleichzeitig ungerade Zahlen sind, die Curven einen Mittelpunkt besitzen. Ist dagegen m gerad und n ungerad, oder umgekehrt, so finden wir für keinen einzigen Werth von ϑ in unserem jetzigen Falle eine Mittelpunktscurve.

c) Ist m und n gleichzeitig ungerad, so haben wir in den betreffenden Horizontalreihen fünf verschiedene Curvenformen, die in verschiedenen Lagen auf einanderfolgen, beziehungsweise sich in der einen oder andern Lage wiederholen. Ist dagegen m gerad, n ungerad, so reducirt sich diese Zahl 5 auf die Zahl 3.

3. Die Art und Weise, wie die Curven der Taf. VIII und IX entstehen, lässt uns im Voraus erkennen, wie viele Maxima und Minima parallel der x und y Axe wir zu erwarten haben: Eine Gerade bewegt sich mit sich parallel so, dass ihr Mittelpunkt immer auf dem Umfange einer Ellipse bleibt, oder auch umgekehrt: eine Ellipse bewegt sich so parallel mit sich selbst, dass ihr Mittelpunkt beständig auf einer Geraden bleibt. Halten wir letztere Bewegung in Gedanken fest und achten darauf, dass in der Zeiteinheit dieser Marsch der Ellipse $m$mal vor sich geht und dass während dieser Zeit der bewegliche Punkt $n$mal um die Ellipse läuft, so folgt einfach, dass parallel jener Geraden (in unsern Figuren $\mu\mu_{,}$) oder parallel der x Axe n Maxima und n Minima stattfinden, dass ferner alle diese Maxima

und Minima von gleicher Grösse sind, dass also alle Curven an diesen Stellen zwei Linien berühren, welche im Abstande $\mu\beta$ und $\mu\beta$, parallel zu $m\mu$ gezogen werden könnten. Wie viele Maxima und Minima haben wir aber parallel der y Axe zu erwarten? Anstatt die Curven, von denen hier die Rede ist, anzusehen, als entstanden durch das Zusammenwirken einer elliptischen und einer geradlinigen Vibrationsbewegung, kann man sie auch entstanden denken aus dem Zusammenwirken dreier geradlinigen Bewegungen, von denen zwei, nämlich $\alpha\alpha$, und $\mu\mu$,, zusammen in eine Gerade fallen, während die dritte $\beta\beta$, senkrecht hierzu stattfindet. Bei der gestellten Frage kommt der Einfluss letzterer Componente nicht in Betracht, sondern nur der der beiden Bewegungen $\alpha\alpha$, und $\mu\mu$,. Die Schwingungszahl von $\alpha\alpha$, ist offenbar dieselbe wie bei der elliptischen Bewegung, d. h. gleich n, die von $\mu\mu$, dagegen gleich m. Also zwei geradlinige Bewegungen unter einem Winkel von 0 Grad wirken zusammen, wie viel Maximal- und Minimalstellen haben wir zu erwarten? Ohne Zweifel ebensoviel als bei den Curven der Taf. VII, d. h. immer so viel, als die grössere Schwingungszahl angiebt. Daraus folgt, dass wir auf der Taf. VIII parallel der y Axe m, dagegen auf der Taf. IX n Maxima und Minima zu erwarten haben, dass mithin auf letzterer Tafel parallel beiden Axen gleich viele Maxima und Minima vorkommen. Begreiflicher Weise können letztere Maxima und Minima nicht alle gleich sein, woraus folgt: dass unsere jetzigen Curven nicht in gleicher Weise wie die Curven der Taf. VI und V in ein Rechteck oder Parallelogramm können eingeschrieben werden.

4. Wenn man bei den Curven des vorigen Capitels die Elongationsweiten $m\mu$ und $m\nu$ ändert, und zwar in beliebiger Weise, so ändern sich hiermit auch immer die Formen der Schwingungscurven; jedoch bestehen diese Aenderungen, wie schon erwähnt, nur in einem Schmäler- oder Breiterwerden nach der einen und andern Vibrationsrichtung hin. In unserem jetzigen Falle aber verhält sich die Sache anders, indem sehr verschiedene Curvenformen zum Vorschein kommen, falls man die Grössen $m\alpha$, $m\beta$ und $m\mu$ so oder so wählt, falls man z. B. mit einer grossen elliptischen eine kleine geradlinige Vibrationsbewegung oder umgekehrt verbindet. Es lag nicht in

meiner Absicht, eine grössere Anzahl von Tafeln zu zeichnen, aus deren Anblick diese Formveränderungen sich erkennen lassen. Nur eine wurde zu dem Ende angefertigt, nämlich die Taf. X. Die elliptische Bewegung, welche bei diesen Curven stattfand, ist dieselbe, wie bei den Curven der beiden Taf. VIII und IX. Deshalb sind die verticalen Dimensionen dieselben, wie bei den Curven der letzteren Tafeln; die geradlinige Vibrationsbewegung aber wurde kleiner angenommen, wie man eben auf Taf. X bei der ersten Curve der obersten Horizontalreihe sieht, wo diese Vibrationsbewegung durch $\mu\mu_1$ bezeichnet ist. Vergleicht man diese Curven der Taf. X mit denen der Taf. VIII, so erkennt man deutlich, wie gewisse Durchschnitte von Curventheilen, welche dort zu Stande kamen, hier nicht vorhanden sind; die Curven nehmen einfachere Gestalten an, sie werden theilweise von einem niederern Gerade, indem z. B. die Curven der dritten Horizontalreihe alle vom 4ten, während die auf der Taf. VIII vom 6ten Gerade sind.

Aus diesen Umständen folgt, dass bei den Curven, welche entstehen durch eine elliptische und eine geradlinige Vibrationsbewegung, das Auge nicht immer mit Sicherheit auf das Verhältnis von $m:n$ schliessen kann, wie es unter allen Umständen bei den Curven des vorigen Capitels, jedoch abgesehen von dem Falle, dass φ gleich Null, möglich ist.

Viertes Capitel.

Optisch-mechanische und graphische Darstellung derjenigen Schwingungscurven, welche durch das Zusammenwirken zweier elliptischen Vibrationsbewegungen erzeugt werden.

---

§. 11.

Allgemeine Betrachtungen.

1. In der Fig. 28, Taf. II sind zwei concentrische Ellipsen gezeichnet mit den Axen $\alpha\alpha_,$ und $\beta\beta_,$, sowie $\gamma\gamma_,$ und $\delta\delta_,$. Jede dieser Ellipsen stelle eine Bahn vor, welche ein schwingender Punkt zu durchlaufen hätte, der hier der einen und dort der andern elliptischen Vibrationsbewegung folgen müsste. Gesetzt, dieser Punkt sollte den beiden elliptischen Bewegungen, die ich der Kürze halber mit $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ bezeichnen will, gleichzeitig Genüge leisten, so kann dies nur dadurch geschehen, dass er eine resultirende Bewegung einschlägt und eine Schwingungscurve durchläuft, deren Form abhängt: von der Schwingungszahl m der Bewegung $\alpha\beta$, von der Schwingungszahl n der Bewegung $\gamma\delta$, von dem Winkel φ, der zwischen $m\alpha$ und $m\gamma$ liegt, von der Phasendifferenz ϑ, die wir der Bewegung $\gamma\delta$ zurechnen wollen, sowie endlich von den absoluten wie relativen Grössen von $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ und $m\delta$.

Wir setzen hierbei wiederum m und n als ganze Zahlen voraus, und nehmen ferner die beiden Bewegungen von α und γ aus in den Richtungen $\alpha\beta\alpha_,\beta_,\alpha$ ... sowie $\gamma\delta\gamma_,\delta_,\gamma$ ....

2. Auch diese eigenthümlichen Bewegungen trifft man bei

sckwingenden Saiten an, indem z. B. eine Saite, welche Grundton und Octave erklingen lässt, jenen sowohl wie diese durch elliptische Vibrationen erzeugen kann, wobei also die Punkte der Saite Bahnen beschreiben müssen, welche ihrer Form nach zu den jetzt betrachteten Schwingungscurven gehören. Denken wir zurück an jenes Pendel, mit den beiden Kugeln, von denen die oberste und unterste jede für sich elliptische Schwingungen machen können, und leiten wir diese Bewegungen gleichzeitig ein, so wird die unterste Kugel offenbar eine hierher gehörige Bahn durchlaufen.

§. 12.

Optisch-mechanische Darstellung dieser Curven.

1. Es unterliegt keinem Zweifel, dass wir die Lissajous'sche Methode der optisch-mechanischen Darstellung von Schwingungscurven auch auf unsern jetzigen Fall anwenden können, indem wir zwei Paar Stimmgabeln, jedes Paar im Einklang stimmend, in geeigneter Weise neben einander stellen und von einer Gabel auf die andere Licht bis zuletzt auf eine Wand oder in unser Auge reflectiren lassen. Diese complicirte Methode vermeidend, können wir aber auch ganz in derselben Weise wie bei den beiden vorausgehenden Curvengattungen unser Kaleidophon benutzen. Zu dem Ende haben wir nur nöthig, statt der Zusammenstellung von Stäben, wie sie die Fig. 12, Taf. I anzeigt, eine gemäss der Fig. 29, Taf. II zu treffen. Die ebene Lamelle L ist durch einen cylindrischen Stahlstab $L_{,}$, das ebene Lamellchen l durch ein cylindrisches Stäbchen $l_{,}$ ersetzt. Jeder dieser Cylinder macht elliptische Schwingungen, welche zusammen eingeleitet, dem obersten Ende von $l_{,}$ die hier angegebenen Bewegungen ertheilen.

2. Es ist wiederum einleuchtend, wie die, auf solche Weise hervorgebrachten, Vibrationserscheinungen den idealen Anforderungen gemäss §. 11, 1. nicht entsprechen, sondern viel complicirterer Natur sind, indem sich fortwährend die Grössen ϑ, φ, $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ und $m\delta$ ändern. Dessenungeachtet gewährt es Befriedigung aus einer grössern Mannigfaltigkeit von Curvenformen, nur in einem bestimmten Momente eine zu erkennen, die eben bestimmten Anforderungen entspricht.

Es leuchtet ferner ein, dass es nicht einerlei ist, ob die Bewegung $\alpha\beta$ oder $\gamma\delta$ die schnellere ist, ob also $m > n$ oder umgekehrt. Jedoch ist begreiflich, dass hierdurch nicht in gleicher Weise zwei Gruppen von Curven zum Vorschein kommen wie im vorigen Capitel. Denn dort verwechselten wir die Rolle einer Geraden mit der einer Ellipse, während hier nur verschieden geformte Ellipsen ihre Rollen umtauschen. Statt zweier Tafeln werden wir also im jetzigen Falle mit einer ausreichen.

3. Nachdem ich nun die Einrichtung meines Kaleidophons zur Darstellung einer grossen Menge von Vibrationserscheinungen erläutert habe, möchte ich hier noch eine Vervollkommnung des ganzen Apparatchens angeben, die vielleicht manchem der Leser als erwünscht erscheinen dürfte: nämlich die Einrichtung zur eigentlichen objectiven Darstellung der Curven in grossem Maasstabe. Zu dem Ende wurden dem Apparate neben den vier Stäbchen L, l, $L_{,}$ und $l_{,}$, welche oben mit vergoldeten Knöpfchen versehen sind, noch zwei andere beigegeben, gerade so wie l und $l_{,}$, nur dass statt der Knöpfchen oben kleine Metallspiegelchen angebracht sind. Auch lässt sich die Einrichtung wohl so treffen, dass man auf einem und demselben Stab, jenachdem man diesen oder jenen Versuch machen will, bald das Knöpfchen, bald das Spiegelchen aufschraubt. Stellt man nun den Apparat so auf, dass die Sonne oder auch wohl das electrische Licht auf das obere Spiegelchen fällt, und leitet die gemeinsame Bewegung ein, so erscheint auf einer gegenüberstehenden Wand die leuchtende Schwingungscurve in einem Maasstabe, der zugleich einem ganzen Auditorium eine deutliche Vorstellung von dem Hergange der Sache giebt. Um wenigstens im einen Sinne bestimmte Drehungen mit Leichtigkeit vornehmen zu können, wurde ferner die Klemme K Fig. 12, Taf. I nicht unmittelbar an den Tisch geschraubt, sondern mittelst eines Charniers an ein Stück Holz H befestigt, und dieses erst dazu bestimmt, fest an eine Tischplatte oder eine andere geeignete Unterlage angeschraubt zu werden. Die ganze Einrichtung erläutert die Fig. 30, Taf. III, in welcher die Zusammenstellung so gewählt ist, wie sie den Curven der Taf. VIII entspricht.

§. 13.

Graphische Darstellung der hierher gehörigen Schwingungscurven.

1. Nehmen wir an (Fig. 31, Taf. III), jede der beiden Bewegungen fände unabhängig von einander statt, die elliptische Bewegung auf $\alpha\beta\alpha,\beta,\alpha$ wie auf $\gamma\delta\gamma,\delta,\gamma$, so würde also in einem bestimmten Momente vermöge der ersten Bewegung der Punkt sich gerade in *a*, vermöge der zweiten sich gerade in *b* befinden. Wenn aber gerade von diesem Augenblicke an die gemeinsame Bewegung beginnen sollte, wo ist der Anfangspunkt dieser gemeinsamen Bewegung zu suchen? Ohne Zweifel da, wo der Punkt *b* hin zu liegen kommt, wenn wir die Ellipse $\gamma\delta$ parallel mit sich selbst so weit verschieben, bis ihr Mittelpunkt mit dem Punkte *a* zusammenfällt, d. h. auf den mit *0* bezeichneten Punkt. Wäre von nun an jede der beiden Bewegungen wieder für sich vorhanden, würde im nächsten Momente vermöge der einen Bewegung der Punkt nach $a,$ vermöge der andern nach $b,$ gelangen, so leuchtet ein, dass er am Ende dieses Zeittheilchens, wenn die beiden Bewegungen während desselben gleichzeitig auftreten, dahin kommt, wo der Punkt $b,$ hingelangt, wenn die Ellipse $\gamma\delta$ parallel mit sich selbst soweit verschoben würde, bis ihr Mittelpunkt auf $a,$ zu liegen käme, d. h. auf den mit *1* bezeichneten Punkt. Um demnach eine Reihe von Punkten, der gemeinsamen Bewegung angehörend, zu finden, verschieben wir eine Ellipse parallel mit sich selbst, so dass ihr Mittelpunkt hierbei auf der andern Ellipse um eine ganz bestimmte Strecke fortrückt, und suchen auf ersterer den Punkt, den der bewegliche Punkt vermöge ersterer Bewegung allein einnehmen würde: der gefundene Punkt ist immer einer der verlangten Bestimmungspunkte.

2. Um diese Aufgabe nun praktisch zu lösen, verfahren wir auf folgende Art. Auf einem Stücke Blech Fig. 32 *a*, Taf. III *ABCD* stechen wir, nach einer allbekannten Methode, 32 Theilpunkte ein, welche 32 Momenten der einen elliptischen Bewegung entsprechen. Dann nehmen wir ein zweites Stück Blech oder steifes Papier *EFGH* (Fig. 32 *b*, Taf. III) und stechen 17 Theilpunkte, der zweiten Ellipse entsprechend, ein, so dass der 0te und 16te Theilpunkt der Ellipse in die Kante *EF* zu liegen kommt. Auf diese Weise hat man von letzterer Bewe-

gung zunächst zwar nur 16 Punkte, aber bei einer Drehung der Schablone um 180° noch einmal 16, also auch im Ganzen 32. Die Schablone Fig. 32 *a*, Taf. III dient dazu, um auf einem Blatt Papier 32 Theilpunkte der einen Ellipse einzustechen; während die Schablone Fig. 32 *b*, Taf. III dazu bestimmt ist, parallel mit sich selbst verschoben zu werden, um dann in einem ihrer Theilpunkte einzustechen und so mehr und mehr Bestimmungspunkte für die zu zeichnende Curve zu erhalten.

Dies vorausgeschickt, möge eine Curve gezeichnet werden für:

$$m = 2$$
$$n = 3$$
$$\vartheta = \frac{1}{24} = \frac{2}{48}$$
$$\varphi = 0.$$

Wir nehmen die Schablone AC, legen sie auf ein Blatt Papier und stechen, da $m = 2$ ist, in jedem zweiten folgenden Punkte mit der Nadel ein, wie in Fig. 33, Taf. III zu sehen ist. Dann wird die Schablone EG zur Hand genommen und, um den Anfangspunkt der Bewegung zu erhalten, zunächst in die Lage gebracht, wie es die Fig. 33, Taf. III zeigt. Da $\vartheta = \frac{1}{24}$, so müssen wir, von γ an gerechnet, im 4ten Theilpunkte einstechen, um den Nullpunkt der Bewegung zu erhalten, wie sich ergeben wird, wenn man die Lehren des §. 4, 1. gehörig beachtet. Um einen weitern Bestimmungspunkt zu erhalten, verschieben wir die Schablone so, dass der Mittelpunkt von $\gamma\gamma$, auf den Punkt (1) zu liegen kommt und EF der Anfangslage parallel bleibt, und stechen vom 4ten Theilpunkt auf $\gamma\delta\gamma$, gerechnet um 3 Punkte weiter ein, da ja einem Fortrücken von 2 Theilpunkten auf der einen Ellipse, ein Fortrücken von 3 auf der andern entsprechen soll. Der Punkt 1 ist der verlangte. So fortschreitend, ist die Zahl der 32 Bestimmungspunkte der verlangten Curve erreicht, sobald man um die Ellipse $\alpha\beta$ zwei und zugleich um $\gamma\delta$ drei Wanderungen gemacht hat. Die Curve, welche hierbei zum Vorschein kommt, wenn man die 32 Theilpunkte gehörig verbindet, zeigt unsere Fig. 33, Taf. III.

In diesem Maasstabe wurden zunächst für dieselben Werthe von ϑ und unter der bestimmten Voraussetzung, dass $\varphi = 0$, die den sechs verschiedenen Verhältnissen von $m:n$ entsprechen-

den Curven gezeichnet, dann verkleinert zu dem Maasstabe der Taf. XI, welche wir sogleich etwas näher betrachten wollen. Vorher jedoch möchte ich noch einige Erleichterungen bei der graphischen Darstellung angeben, welche überhaupt beim Zeichnen von Schwingungscurven beachtenswerth sind. Im Allgemeinen haben wir zwei Schablonen nöthig, die eine dient dazu, eine Reihe fester Punkte auf Papier einzustechen, die andere dagegen wird auf diesem Papier in geeigneter Weise verschoben. Um bei dieser Verschiebung bestimmte Richtungen einhalten zu können und Gegenden des Zeichenpapiers nicht zu überdecken, musste die zu verschiebende Schablone in geeigneter Weise ausgeschnitten werden, also z. B. die Schablone Fig. 32 *b*, Taf. III so eingerichtet werden, dass ihre eine Kante *EF* in sich die drei Punkte γ, γ, und *m* enthielt und ausserdem nur die Hälfte der 32 Ellipsenpunkte. Hierdurch ist man genöthigt, von Zeit zu Zeit diese Schablone umzukehren, was zeitraubend und für den Zeichner mühevoll ist. Um Alles dies zu vermeiden, thut man gut, die eine Schablone, welche immer parallel mit sich verschoben werden muss, aus durchsichtigem Oelpapier zu machen, auf diesem die betreffenden Punkte der geradlinigen oder elliptischen Bewegung anzugeben, und beim Verschieben dieses Papiers durch jene Punkte auf das Zeichenpapier einzustechen. Die Durchsichtigkeit des Oelpapiers gewährt hierbei manchen Vortheil, und an Genauigkeit dürfte ein solches Verfahren dem, nach welchem man Messingblech zu den Schablonen verwendet, schliesslich nicht nachstehen.

§. 14.

Vorläufige Betrachtung der Formverhältnisse der hierher gehörigen Schwingungscurven.

1. Die Tafel XI zeigt, dass auch bei dem Zusammenwirken zweier elliptischen Vibrationsbewegungen, sobald sie im Einklange stehen, eine Ellipse als Schwingungscurve resultirt, was von vornherein erwartet werden konnte: denn da eine elliptische Vibrationsbewegung als Resultat zweier gleichzeitig auftretender geradlinigen Bewegungen anzusehen ist, so haben wir es hier eigentlich mit vier geradlinigen Bewegungen zu thun, deren Schwingungszahlen alle gleich sind; drei hiervon

geben, wie die Taf. VIII. und IX zeigen, eine Ellipse, und diese muss mit der vierten geradlinigen Bewegung wieder eine elliptische erzeugen. Ueberhaupt, wir dürfen eine beliebige Anzahl geradliniger Bewegungen combiniren, sobald ihre Schwingungszahlen alle gleich sind, setzen sie sich zu einer elliptischen zusammen, welche allerdings speciell als Kreis, als Gerade und auch als Punkt sich gestalten kann.

2. Was die Form der Curven anlangt, so zeigt die Taf. XI im Allgemeinen in jeder Horizontalreihe nur solche, die weder bezüglich der x Axe (eine Gerade, die mit den Axen $\alpha\alpha_{,}$ und $\gamma\gamma_{,}$ zusammenfällt), noch bezüglich der y Axe symmetrisch liegen. Nur für bestimmte Werthe von ϑ erhalten wir symmetrische Formen, bald zu einer der Axen allein, bald zu beiden und zwar Letzteres nur dann, wenn m und n ungerad ist. In diesem Falle sind für jeden Werth von ϑ die Schwingungscurven auch Mittelpunktscurven. Ueberhaupt wird folgender Satz als richtig erkannt werden müssen:

»Wenn eine beliebige Anzahl geradliniger Vibrations-
»bewegungen gegeben ist, welche nach den Schwingungs-
»zahlen in zwei Theile zerfällt, der eine mit einer Schwin-
»gungszahl gleich m, der andere mit einer Schwingungs-
»zahl gleich n, und diese beiden Zahlen sind ungerade, so
»ist die aus dem Zusammenwirken aller jener Vibrations-
»bewegungen resultirende Schwingungscurve eine Mittel-
»punktscurve.«

3. Da wir in unserem jetzigen Falle die Curven auch so betrachten können, als wären sie aus zwei Paar geradlinigen Vibrationsbewegungen entstanden, von denen das eine Paar in die x, das andere in die y Axe fällt, so können wir gemäss der Beschaffenheit der graphischen Darstellungen auf Taf. VII erwarten, dass, wenn, wie es in unserem jetzigen Fall angenommen ist, $n > m$ wir sowohl parallel der einen wie der andern Axe n Maxima und Minima zu erwarten haben. Denn in der x Axe fallen die Bewegungen $\alpha\alpha_{,}$ und $\gamma\gamma_{,}$ zusammen: jene mit der Schwingungszahl m, diese mit der Schwingungszahl n; in der y Axe vereinigen sich die Bewegungen $\beta\beta_{,}$ und $\delta\delta_{,}$ mit den Schwingungszahlen m und n. Jedes dieser Paare würde bei der graphischen Darstellung nach Art der Taf. VII eine Curve liefern mit n Maximis und Minimis, woraus folgt, dass auch

unsere Curven der Taf. XI nach beiden Axenrichtungen hin, dieselbe Anzahl Maxima und Minima besitzen. Da diese Maxima und Minima begreiflicher Weise nicht alle gleich sein können, so folgt, dass unsere jetzigen Curven nicht in gleicher Weise wie die Curven der Taf. V und VI in ein Parallelogramm oder Rechteck eingeschrieben werden können, ja dass sie selbst nicht einmal zwischen zwei Parallellinien eingeschrieben werden können, wie es bei den Curven des vorigen Capitels der Fall war.

4. Unsere jetzigen Schwingungscurven erscheinen alle vom $2n^{\text{ten}}$ Grade. Achten wir darauf, dass die Curven der Taf. V, VI und VIII vom

$$2m^{\text{ten}},$$

die der Taf. IX und XI vom

$$2n^{\text{ten}}$$

Grade sind, dass dort m, hier n die grössere Schwingungszahl ist, so können wir sagen, wenn wir von Besonderheiten, wie sie sich auf Taf. X aussprechen, absehen, dass aus dem Grade einer Schwingungscurve, welche einer der drei hier genauer betrachteten Gattungen von Schwingungscurven angehört, die grössere Schwingungszahl erkannt werden kann.

Fünftes Capitel.

Weitere Methoden der Darstellung und Beobachtung von Schwingungscurven, sowie Nutzanwendungen von letzteren.

§. 15.

Einfache Apparate zur subjectiven Combination zweier geradlinigen Vibrationsbewegungen.

1. Die Methoden, welche im Vorhergehenden zur Darstellung und Beobachtung von Schwingungscurven angegeben wurden, sind nicht etwa die alleinigen, sondern es lassen sich diese noch sehr vermehren, wie wir sogleich sehen werden.

In Fig. 34, Taf. III ist die Einrichtung eines Apparates angedeutet, dessen wirkliche Ausführung mit keinerlei Schwierigkeiten verbunden ist. L und L_1 stellen zwei Stahllamellen vor, deren Fläche senkrecht zur Ebene des Papiers liegt. Senkrecht zu diesen Lamellen sind vorn an ihnen zwei Platten angebracht, von denen CD unter AB liegend zu denken ist. In AB wie CD ist ferner ein Schlitz ausgeschnitten, welchen unsere Figur dort mit $\mu\mu_1$, hier mit $\nu\nu_1$ bezeichnet. Diese beiden Schlitze, rechtwinklig zu einander gestellt, gestatten dem Auge, das von oben nach unten durch sie hindurch sehen will, dies nur durch eine kleine quadratische Oeffnung, und etwa noch an den Stellen des Schlitzes $\mu\mu_1$ und $\nu\nu_1$, welche über CD und AB hinausragen. Klemmen wir die Stäbe an den als frei gezeichneten Enden ein und versetzen sie in transversale Schwingungen, so leuchtet ein, wie das von oben nach unten

auf die Platten und Schlitze sehende Auge einen hellen Punkt auf dunkler Unterlage herumwandern sieht, indem fortwährend die beiden Schlitze an andern Stellen das Licht durch ein parallelogrammatisches Loch hindurch lassen, es leuchtet ein, wie dieser helle Punkt jene Curven beschreibt, die wir aus Taf. V und VI bereits näher kennen lernten. Denn mit Leichtigkeit kann man statt der rechtwinkligen auch eine schiefwinkliche Anordnung der Schlitze $\mu\mu_{,}$ und $\nu\nu_{,}$ treffen.

2. In ganz ähnlicher Weise stellt die Fig. 35, Taf. III eine Einrichtung vor, deren Ausführung noch einfacher ist, wie im vorhergehenden Falle. Zwei Stahllamellen L und $L_{,}$ sind an ihrem einen Ende mit zwei feinen geschwärzten Dräthchen versehen, welche sich im Punkte m kreuzen. Sobald die Stäbe in Schwingung versetzt werden, erkennt das auf den Kreuzungspunkt m blickende Auge, wie dieser in einer Curve herumwandert.

Diese oder die vorige Zusammenstellung eines Apparates gestattet mit Leichtigkeit Aufschlüsse über die Schwingungen eines Stabes. Gesetzt nämlich, man wüsste bereits, dass der Stab L in der Secunde m Schwingungen mache, und wollte auch gern die Anzahl der Schwingungen von dem Stabe $L_{,}$ wissen, oder doch wenigstens ein Stück desselben kennen lernen, das etwa $\frac{1}{2}$, 1, 2 oder 3 mal so viel Schwingungen in derselben Zeit ausführte, so wäre nur nöthig, das eine Ende eines jeden Stabes nach Art der Fig. 34 oder 35, Taf. III einzurichten und die Schwingungscurve so lange zu beobachten, bis sie eben durch das gehörige Einstellen von $L_{,}$ die gewünschte Form angenommen hat. Das Resultat, welches auf diese Weise erlangt wird, ist als ein genaues zu betrachten, da man ja namentlich nach der Einrichtung der Fig. 35, Taf. III die Drähtchen oder auch Glasfäden an dem Ende so dünn machen kann, dass ihr Gewicht die Zahl der Schwingungen nur sehr wenig verändert.

3. Eine sinnreiche Einrichtung eines hierher gehörenden Apparats lernte ich aus einer, mir von Herrrn Hofrath Eisenlohr übersandten, Zeichnung kennen, welche nach einem von ihm construirten Apparate entworfen war. Auf einem mit drei Stellschrauben versehenen Fussbret Fig. 36, Taf. III ist eine

etwa 8 Fuss hohe Latte senkrecht befestigt. Diese trägt oben einen kürzern Querarm, woran ein zweiter unter rechten Winkeln befestigt ist. An letzterem hängt an zwei Fäden ein Stab von Holz oder Metall in unserer Figur mit *aa* bezeichnet. Durch Umdrehen der, an dem zweiten Querarm sichtbaren, Schraubenmuttern kann das eine oder andere Ende von *aa* etwas gehoben oder gesenkt werden, während man durch ein ein- oder mehrmaliges Umschlingen der Fäden an den beiden Enden von *aa* eine grössere Hebung und Senkung zu erzielen im Stande ist. Durch den zweiten Querarm senkrecht hindurch ist ein weiterer Stab *m* gesteckt und trägt ein Stäbchen *cc*, das mit Reibung unten in einem Loche von *m* drehbar ist. An *cc* hängt der Knopf *p* und kann durch Umdrehen von *cc* gehoben und gesenkt werden. Diese Einrichtung gestattet einmal den Stab *aa* in Schwingungen zu versetzen, wobei er parallel mit sich selbst bleibt; sie gestattet zweitens dem Knopf *p* eine geradlinige (oder doch nahezu geradlinige) Vibrationsbewegung zu ertheilen; sie gestattet drittens beide Bewegungen gleichzeitig einzuleiten, wobei das Auge des Beobachters in eigenthümlicher Weise in der Bewegung von *p* getäuscht wird und glaubt, *p* bewege sich auf einer Curve, welche durch Combination zweier geradlinigen Vibrationsbewegungen entsteht. Stellt nämlich in unserer Fig. 37, Taf. III a_0a_0 den Stab *aa* in der Ruhelage vor, aus welcher er bei der Bewegung in der Richtung des Pfeils am Ende eines ersten Zeitmoments nach a_1a_1, am Ende des zweiten nach a_2a_2 und von hier wieder rückwärts gelangt, wie die Figur zeigt, während gleichzeitig der Knopf *p* im Maximo der Elongationsweite vom Punkte *0* aus seine Bewegung beginnt und am Ende des ersten Moments nach *1*, am Ende des zweiten nach *2* u. s. f. kommt, so verhält sich die Sache am Ende des ersten Momentes folgendermassen: das Auge glaubt, der Stab *aa* wäre in Ruhe geblieben und *p* sei von *0* nach (*1*) gewandert in der Richtung des kleineren Pfeils. In gleicher Weise hält das Auge auch in irgend einem andern Momente der Bewegung den Stab *aa* für ruhend, dagegen den Knopf *p* in einer der Bewegung von *aa* entgegengesetzten Bewegung begriffen, so dass in der That die Täuschung so vollendet wird, als beschriebe, in dem bestimmt angenommenen Falle der Fig. 37, Taf. III der Punkt *p* eine Ellipse von 0 aus

in der Richtung des Pfeils. Aendert man die Längen der Fäden, so kann man natürlich statt der Ellipse auch andere Schwingungscurven dem Auge versinnlichen. Dreht man den Stab *m* in dem Loche, worin er steckt, etwas herum und stellt ihn mit der am Apparat sichtbaren Schraube wieder fest, so kann man dadurch den Winkel zwischen den beiden Vibrationsrichtungen ändern.

§. 16.

Die Vibrationsmicroscope.

1. Die Methoden der Darstellung und Beobachtung von Schwingungscurven, welche wir im Vorausgehenden kennen lernten, verlangen ausser der Lissajous'schen subjectiven Beobachtungsmethode, der Vergrösserung des Maasstabes wegen keine Vergrösserungsgläser, da eben jener Maasstab der Figuren an und für sich gross genug ist, um dem blossen Auge zu genügen. In besondern Fällen ist dies jedoch anders: der schwingende Körper, über welchen man diesen oder jenen Aufschluss haben will, kann oder darf nicht in so starke Schwingungen versetzt werden, dass seine einzelnen Punkte von dem unbewaffneten Auge in ihrer Bewegung verfolgt werden können; oder es ist nicht erlaubt, ihn mit einem Spiegelchen an gewisser Stelle zu versehen, um so durch den Reflex des Lichtes einen grössern Maasstab zu erzielen. In dieser Beziehung waren bestimmte Vorrichtungen nöthig, und mussten bestimmte Apparate construirt werden, denen man passend den Namen »Vibrationsmicroscope« gegeben hat.

2. Die Idee, welche diesen Apparaten zu Grunde liegt, ist einfach folgende. Wenn man mit dem Auge nach einem leuchtenden Punkte hinsieht, z. B. einem Fixsterne, und nun vor das Auge eine Linse bringt, welche bei vielen Beobachtern durch die Brille schon gegeben ist, so kann man leicht den Lichtpunkt eine Reihe von Curven am dunklen Himmel beschreiben lassen. Zu dem Ende ist nur nöthig, jene Linse oder die Brille vor dem Auge in gehöriger Schnelligkeit hin und her in dieser und jener Weise zu bewegen. Denn da hierdurch der in der Linse gebrochene Lichtstrahl in seiner Bahn beständig abgelenkt wird, so beschreibt auch sein Bild auf der Netz-

haut eine dieser Ablenkung entsprechende Bahn, welche bei hinlänglich rascher Bewegung als zusammenhängende Lichtcurve wahrgenommen wird.

In ganz gleicher Weise kann man bei ruhenden Stäben meines Kaleidophons, bei ruhenden Saiten, Membranen und irgend welchen ruhenden tonangebenden Körpern, irgend einen gehörig markirten Punkt derselben bloss durch die angedeutete Bewegung einer Linse vor dem Auge eine Reihe von Curven beschreiben lassen, deren Mannigfaltigkeit sehr gross ist. Was wir aber bei ruhenden Körpern versuchten, können wir in gleicher Weise versuchen, sobald jene in Schwingung versetzt sind. Man lasse das Knöpfchen des Kaleidophons irgend eine Curve beschreiben und bewege, während diese erscheint, die Linse vor dem Auge, so ist klar, wie man nunmehr die Gestalt jener Curve verändern kann, wie man in diesem Verfahren ein Mittel besitzt, um jenes unterhaltende Spiel der Beobachtung der kaleidophonischen Figur noch weiter zu treiben.

3. Unsere Hand wird bei diesen Experimenten der Linse vor dem Auge nur sehr unregelmässige Bewegungen ertheilen können, so dass es nicht lange gelingt, eine bestimmte Bewegung des schwingenden Körpers mit einer bestimmten Bewegung der Hand zu combiniren, um so aus dem Anblick der Schwingungscurve über jene oder diese Bewegung bestimmte Schlüsse machen zu können. Ganz anders wird die Sache aber, wenn wir die Bewegung der Linse vor dem Auge abhängig machen von der Bewegung eines andern Körpers, der eben seine Bewegungen nach bestimmten Gesetzen und dauernd ausführt; wenn wir die Linse einfach befestigen an dem vordern Ende eines Stabes, welcher am andern eingeklemmt ist und zwar so, dass bei voller Ruhe des Apparats das durch die Linse sehende Auge bequem jenes leuchtende Knöpfchen des Kaleidophons oder einen leuchtenden Punkt einer Saite erblickt, und nun den Stab mit der Linse und das Stabsystem des Kaleidophons oder die Saite gleichzeitig in Bewegung setzen. Kennen wir bei dieser combinirten Bewegung ihrer Natur nach nur die eine Componente, z. B. nur die Bewegung des Stabes mit der Linse, oder diese nicht, dagegen die des Kaleidophons oder des Saitenpunktes, so leuchtet ein, wie bei der Combination beider Bewegungen eine resultirende entsteht, aus deren

Anblick möglicher Weise die eine unbekannte Bewegung nach gewisser Richtung hin eine Aufklärung erfahren kann.

4. Diese Andeutungen genügen, um sich zu überzeugen, wie man auf anderem Wege die Curven des dritten und vierten Capitels durch schwingende Körper dem Auge vorführen kann. Zu dem Ende hat man die Methode LISSAJOUS' in der Art zu verändern, wie ich durch die Fig. 38, Taf. III näher erläutern möchte. *A* und *B* stellen zwei Unisonogabeln vor, so dass das, von *S* nach *A* und *B* und durch die ruhende Linse *L* ins Auge des Beobachters gelangende, Lichtbüschel bei der richtigen Phasendifferenz von *A* und *B* eine Ellipse als Schwingungscurve erzeugen würde. Tritt nun zu der Bewegung von *A* und *B* noch die der dritten Gabel *M* hinzu, so leuchtet ein, wie sich die elliptische Vibrationsbewegung mit einer geradlinigen combinirt und so nothwendig eine Schwingungscurve entstehen muss, wie wir sie im dritten Capitel kennen lernten. Würde durch die mehrmalige Reflexion die Intensität des Lichtstrahls, der zuletzt ins Auge gelangt, eine nicht zu geringe, so stände nichts im Wege, statt dreier Gabeln vier zusammenzustellen, nämlich zwei Paar Unisonogabeln, wodurch die Curven des vierten Capitels erhalten würden.

Es versteht sich von selbst, dass man auch meine Methode: mit Hilfe schwingender Lamellen und cylindrischer Stäbe Curven darzustellen, in mannigfacher Weise erweitern kann dadurch, dass man einem schwingenden Stabsystem ein zweites gegenüberstellt, dessen oberes Ende eine Linse trägt, durch welche das Auge nach dem Knöpfchen des ersten Systems hinsieht. Wenn es sich aber darum handelte, ein mehr constantes Verhalten der Formen bei den verschiedenen Curven herauszubringen, so würde die durch die Fig. 38, Taf. III erläuterte Methode vorzuziehen sein.

5. Wenn es sich nicht bloss um eine Verschiebung eines auf die Linse fallenden Strahlenbündels, sondern auch um eine hinreichende Vergrösserung handelt, so bedarf es statt einer einfachen Linse eines Microscops, und zwar verfährt LISSAJOUS hierbei folgendermaassen. Auf zwei passenden Gestellen Fig. 39, Taf. III wurden zwei Stimmgabeln eingeschraubt, die eine *M* so, dass ihre Zinkenebene horizontal, die andere *N* so, dass diese Ebene vertical stand. Ein horizontaler fester Querarm trug ein Mi-

croscop *F*, dessen Objectiv aber mit dem Ocular nicht in einer Röhre zusammensteckte, sondern das von letzterem getrennt und in der richtigen Entfernung an dem einen Arm der horizontalen Stimmgabel bei *o* angebracht wurde. Bewegt sich demnach die Gabel *M*, so bewegt sich mit ihr das Objectiv, wodurch dieselbe Wirkung für den Beschauer erzielt wird, als hätte man das ganze Microscop von den Schwingungen der Gabel abhängig gemacht. Ist nun Alles in Ruhe und der Beobachter sieht durch *F* hindurch auf das obere Ende eines Zinkens der verticalen Gabel, so lässt sich auf diesem ein Punkt markiren, der Art, dass er als ein möglichst scharfer Punkt im Gesichtsfeld wahrgenommen wird, entweder dadurch, dass man mit einer Stahlnadel eine kleine Vertiefung im Metalle der Gabel anbringt, oder dadurch, dass man ein kleines erhabenes Pünktchen anbringt, oder auf irgend eine andere Art. Sobald die Bewegung der Gabel *N* stattfindet, wird dieser Punkt in gerader Linie hin und hergehen und der Beobachter wird die Strecke dieser Linie in vergrössertem Maasstabe als eine markirte Linie erkennen, und tritt zur Bewegung von *N* noch die von *M* hinzu, so combinirt sich offenbar mit jener ersten geradlinigen Bewegung noch eine zweite und der Punkt beschreibt eine Curve, deren Form den Beobachter über die Schwingungsverhältnisse der beiden Gabeln belehren kann. Sollen diese Curven noch deutlicher im Gesichtsfeld auftreten, so kann man mittelst einer Linse auf dem einen Zinkenende mehr Licht concentriren.

Mit Hilfe dieses Apparats ist es ein Leichtes, sich ohne irgend eine Spur von musikalischem Gehör, ohne irgend welche Rücksicht auf die Schwebungen zu nehmen, eine Anzahl Unisonogabeln zu verschaffen. Gesetzt nämlich, man hätte neben der Gabel *N* noch zwei andere Gabeln *P* und *Q*, welche genau mit *N* unisonoklingend gemacht werden sollten, so verfährt man, um dieses zu erreichen, einfach folgendermaassen. Man giebt der Gabel *N* zunächst ihre richtige Stellung und beobachtet, nachdem sie und die Gabel *M* ins Tönen gebracht worden sind, die, im Gesichtsfeld des Microscops erscheinende, Schwingungscurve. Soll sich diese ihrer Form nach mehr oder weniger ändern, sollen gewisse Uebergänge von einer Form in die andere, bedingt durch eine successive Aenderung der Phasen-

differenz, in einem langsameren Tempo stattfinden, so kann man dies leicht dadurch erzielen, dass man die Gabel *N* ganz unberührt lässt und nur an *M* auf irgend eine Weise an einem oder auch an beiden Zinken eine Belastung anbringt und diese so lange verschiebt, bis man eben befriedigt ist. Hierauf wird die Gabel *N* entfernt und statt ihrer die Gabel *P* oder *Q* angebracht und wiederum die Schwingungscurve beobachtet. Ist diese an Form der bei der Gabel *N* beobachteten vollkommen gleich und finden die Uebergänge von einer Form in eine andere genau in derselben Zeit statt wie bei der Gabel *N*, so kann man überzeugt sein, dass die Gabel *P* genau unisono mit *N* ist. Bemerkt man aber diese Uebereinstimmungen in den Curvenverhältnissen nicht, so wird man leicht ermitteln können, ob *P* zu tief oder zu hoch im Vergleich zu *N*. Man darf nämlich nur an einem Zinken von *P* etwas Wachs anbringen, um so die Gabel mehr oder weniger zu vertiefen. Bemerkt man hierbei einen raschern Formenübergang bei den Curven, so ist dies ein Beweis, dass man durch diese Belastung, also durch das Tiefermachen von *P*, diese Gabel noch weiter vom Unisono mit *N* entfernt hat; sie muss also umgekehrt etwas höher gemacht werden, dadurch, dass man gleichmässig die beiden Zinken mit einer Feile oben etwas abfeilt. Zeigt sich aber bei dem Aufkleben von Wachs, dass die Uebergänge in den Curvenformen verlangsamt werden, so ist dieses ein Beweis, dass die Gabel *P* hierdurch, also durch Belastung dem Unisono von *N* näher geführt wird. Statt einer Belastung am obern Theile der Zinken erreicht man denselben Zweck auch dadurch, dass man die Zinken an ihren untern Enden etwas dünner feilt. Thut man dies, prüft man immer nach jedem Feilstrich die Gabel unter dem Microscop, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass auf diese Weise das genaue Unisono erreicht wird.

Aber nicht bloss gelingt es auf diese Weise, eine Unisonogabel zu schaffen; auch irgend ein Intervall lässt sich in der angedeuteten Manier zwischen *P* und *N* herstellen. Sollte z. B. *P* und *N* eine genaue Terz bilden und weiss ich aus dem Anblick der Curve, durch die Schwingungen von *N* und *M* erzeugt, dass diese eine Quinte mit einander machen, so würde also, wenn *P* mit *N* eine grosse Terz bilden soll, *P* mit *M* eine

kleine bilden müssen, und man hat dafür zu sorgen, dass die Schwingungscurve zwischen *P* und *M* die Gestalt erhalte, welche gemäss des Intervalles der kleinen Terz zum Vorschein kommen muss.

6. Um speciell über die Schwingungen der Saiten mit Hilfe der Schwingungscurven Aufschluss zu erhalten, richtete Lissajous einen Apparat ein, wie ihn die Fig. 40, Taf. III näher versinnlicht. Ueber einem Kasten ist horizontal eine Saite *ss* ausgespannt, und um einen bestimmten Punkt dieser Saite zu markiren, wurde sie an der Stelle, welche zunächst einer Prüfung unterworfen werden sollte, mit Russ überzogen und dieser wiederum mittelst einer Nadel oder einem Messer an einer kleinen Stelle entfernt, so dass an dieser das Metall zwischen dem Russ hervorleuchtete. Statt dessen kann man auch in einiger Entfernung von der Saite eine Linse, etwa eine Cylinderlinse *l* aufstellen und mittelst dieser nach einem bestimmten Punkt der Saite hin einen hellern Glanz verbreiten. Nach einem so beleuchteten oder markirten Punkte sieht nun der Beobachter durch das Microscop *F*, dessen Objectiv aber für sich an einer horizontalen Gabel *M* befestigt ist, während das Ocular ein für allemal fest an dem horizontalen Arm eines Gestells angebracht ist. Wird nun die Saite in Schwingung versetzt, indem man sie mit dem Violinbogen anstreicht, so führt sie, je nachdem man diesen hält, bald horizontale, bald mehr schiefe ebene und wohl auch andere Schwingungen aus. Nehmen wir an, sie schwänge in einer Horizontalebene, so bewegt sich der erleuchtete Punkt auf ihr in einer horizontalen Geraden nach der Zeichnung unserer Figur von vorn nach hinten gerichtet. Bewegt sich statt der Saite nur die Gabel *M* und mit ihr das Objectiv *o*, so würde jene erleuchtete Stelle eine horizontale Gerade, zwischen rechts und links gerichtet, beschreiben, und leiten wir beide Bewegungen gleichzeitig ein, so beschreibt der helle Punkt offenbar eine Schwingungscurve.

Es ist einleuchtend, wie man in dem Vibrationsmicroscope ein Mittel besitzt, um in Betreff der Schwingungen einer Saite bei Streichinstrumenten Fragen zu lösen, welche bis jetzt einer genügenden Lösung wiederstanden. Die Führung des Bogens auf einer Violinsaite ist bekanntlich in unendlicher Mannigfaltigkeit möglich. Aber je nachdem sie so oder so eingeleitet

und unterhalten wird, ist das Resultat, der Klang der Saite, ein sehr verschiedener, bald kurz abgebrochen, bald ruhig anhaltend, bald zitternd und schnarrend; und es ist natürlich zu erwarten, dass alle diese verschiedenen Klangfarben, entsprechend den verschiedenen Streicharten, durch verschiedene Schwingungsformen der Saite hervorgebracht werden. Welche Form nun im einen oder andern Fall auftritt, lässt sich nicht sowohl durch unmittelbare Betrachtung verschiedener Saitenpunkte in ihrer Bewegung erkennen, als vielmehr gerade dadurch, dass man diese Bewegungen mit einer andern bekannten in der angegebenen Weise combinirt, und es ist in dieser Beziehung ein Feld specieller Forschung eröffnet, dessen Bedeutung dem einleuchtet, welcher mit den neuesten Entdeckungen von Helmholtz*) sich bereits bekannt gemacht hat. Von diesen möge denn auch hier der interessante und wichtige Satz, dass eine Saite, wenn sie einen Ton giebt, der durch den Strich eines Violinbogens hervorgerufen ist, so schwingt, dass jeder Punkt derselben auf der einen und auf der andern Seite der Gleichgewichtslage sich mit constanter Geschwindigkeit bewegt, während wir erwarten sollten, dass diese Geschwindigkeit dem Sinus der Zeit proportional wäre.

7. Bei der Nachweisung dieses Satzes benutzte Helmholtz ein vom Mechanikus Koenig in Paris vervollkommnetes Vibrationsmicroscop, dessen Einrichtung sich aus der Fig. 41, Taf. III ersehen lässt und wobei mit Rücksicht auf das Vorhergehende nur die Art und Weise aus einander gesetzt werden muss, auf welche die Stimmgabel continuirlich zum Tönen gebracht wird, ohne dass man sie anschlägt oder anstreicht. Diese sinnreiche und bedeutungsvolle Manier, Schwingungen einer Gabel hervorzurufen, geschieht durch den electrischen Strom und ist auch meines Wissens eine Erfindung Lissajous'.

In der Figur 41, Taf. III erblickt der Leser bei *F* das Ocular bei *o* das, an der Stimmgabel *M* befestigte, Objectiv des Microscops. Die beiden Enden der Gabel liegen zweien, mit einer Drahtspirale umgebenen, Eisenkernen *E* gegenüber. Wer-

*) Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig bei Vieweg und Sohn. Siehe besonders S. 137 und Beilage V.

den diese momentan magnetisch, so ziehen sie momentan die Enden der Gabel nach sich an, diese schwingen hierauf zurück und nähern sich im zweiten Momente wieder den Eisenkernen; lässt sich im selben Momente der Strom wiederherstellen, so wird offenbar die Schwingung der Gabel verstärkt. Lässt sich demnach ein Strom einrichten, der im Momente sich schliesst, wo die Zinken nach den Eisenkernen gemäss der bereits eingeleiteten Bewegung gehen, und aufhört bei dem entgegengesetzten Gange, so leuchtet ein, wie man durch einen solchen Strom oder eigentlich durch genau intermittirende Ströme eine Gabel continuirlich in Schwingung erhalten kann. Macht z. B. die Gabel in der Secunde 512 Schwingungen, so müssten in dieser Zeit auch 512 Schliessungen und Oeffnungen des Stroms stattfinden. Jedoch man begreift, dass man dieselbe Gabel auch mit einem Strome von der Hälfte oder dem Drittel oder überhaupt einem aliquoten Bruchtheile jener 512 Unterbrechungen und Schliessungen im Tönen erhalten kann. Denn hätten wir einen Strom von dem dritten Theile der Unterbrechungen, so würde allemal bei der dritt-folgenden Schwingung der Gabel der Strom begünstigend einwirken und der Gabel Kraft verleihen, vermöge ihrer eigenen Elasticität sich bis zum nächsten Anstosse in Schwingung zu erhalten u. s. f. Hieraus sieht man, dass durch eine geringere Anzahl von Unterbrechungen zwar die Gabel nicht aufhören kann, Schwingungen zu machen, dass aber jedenfalls die Intensität der Schwingungen mit der geringeren Zahl abnimmt, und dass man die grösste Intensität erlangt, falls man das Unisono der Unterbrechungen und der Schwingungen der Gabel herstellt.

Um nun wirklich solche intermittirende Ströme herzustellen, dient neben dem Apparate der Fig. 41, Taf. III noch ein zweiter Apparat: der sogenannte »Unterbrecher«, dessen Einrichtung aus Fig. 42, Taf. III zu ersehen ist. Auf einem Gestelle von Holz ist eine Stimmgabel N befestigt, so dass ihre Enden einem Electromagneten $E_{,}$ gegenüberstehen. Diese Enden tragen ferner zwei Platindrähte und ragen mit diesen in die zu Näpfchen ausgearbeiteten obern Enden der Messingsäulchen k und $k_{,}$. Werden diese Näpfchen mit Quecksilber gefüllt, bis dieses eben die Dräthe berührt, so würde diese Berührung gleichmässig unterbrochen und wiederhergestellt werden,

falls man die Gabel in Schwingung versetzte. Um einen Strom durch die Gabel zu leiten und diesen durch die Gabel selbst zu öffnen und zu schliessen, und um dieses Spiel beliebig lange zu unterhalten, ist offenbar nur nöthig, etwa bei *k* den Strom eintreten zu lassen, damit er von hier durch die Gabel nach *k*, von hier nach *h*, dann um den Electromagneten herum nach *k*, und von hier zur Batterie zurück gelangt. Denn beim ersten Schluss wird *E*, magnetisch, die Zinken werden gehoben, der Strom wird unterbrochen, bis die Gabel wieder zurückschwingt und so wiederholt sich dieses. Der Vorgang, wie er bei der gleichzeitigen Zusammenstellung von dem letzten Apparate und dem in Fig. 41, Taf. III stattfindet, ist schematisch in Fig. 43, Taf. III dargestellt, worin *B* die Batterie vorstellt, von welcher aus der Strom in der Richtung des Pfeils seinen Weg einschlägt. Damit hierbei in Wirklichkeit der möglichst günstige Erfolg erzielt werde, ist nur nöthig, dass *N* mit *M* im Einklange steht, was leicht, wenn dieser schon von vorn herein annähernd erreicht ist, durch Verschiebung der Häkchen *i* (Fig. 42, Taf. III) und *f* (Fig. 41, Taf. III) bewirkt werden kann.

8. Will man nun die, mit dem Violinbogen angestrichene, Saite mittelst des Vibrationsmicroscops beobachten, so schwärzt man nach Helmholtz dieselbe an der betreffenden Stelle mit Tinte, reibt sie, wenn sie trocken geworden ist, mit Klebwachs ein und pulvert etwas Stärkemehl drüber, so dass von letzterem einige Körnchen auf der Saite haften bleiben und so auf dem dunklen Grunde gehörig hervortreten. Angenommen, eins dieser Körnchen läge in der Mitte der Saite und diese gebe ihren Grundton, so würde, wenn man die Violine in verticaler Stellung vor dem Objectiv des Microscops befestigt, so, dass das die Mitte bezeichnende Stärkekörnchen gerade in Mitten des Gesichtsfelds erscheint, und die Gabel allein schwingt, das Körnchen eine verticale, und wenn die Saite allein tönt, eine horizontale Gerade beschreiben. Lässt man beide Bewegungen gleichzeitig auftreten, so müsste nothwendig eine Figur der ersten Horizontalreihe auf Taf. VI zum Vorschein kommen, wenn eben die horizontale und verticale Componente derselben Art wären, d. h. wenn die Entfernung des bewegten Punktes von der Ruhelage auf beiden Geraden: der horizontalen und verticalen, proportional dem Sinus der Zeit wäre.

Eine dem entsprechende Curvenform erblickt man aber nicht, woraus folgt, dass die beiden componirenden Bewegungen anderer Natur sein müssen. Da man das Verhältnis der Elongationsweiten bei der horizontalen und verticalen Componente durch die Beobachtung mit dem Microscope genau erkennen kann, so kann dies Verhältnis in einer zu entwerfenden Zeichnung auch getreu wiedergegeben werden. Gesetzt nun, in der Fig. 44, Taf. IV wäre $m\mu$ und $m\nu$ diesem Verhältnis nach gewählt und wir setzten voraus, die Bewegung auf $\mu\mu_1$ sei gleichförmig, so würde, jenachdem $\vartheta = 0$ oder $\frac{1}{8}$ oder $\frac{2}{8}$ eine der drei gezeichneten Curven zum Vorschein kommen, eine Curve, welche genau in allen Theilen der im Microscope erscheinenden éntspricht. Wir dürfen hieraus schliessen, dass unsere Hypothese von der gleichförmigen Bewegung auf der horizontalen Geraden, d. h. die Bewegung der Violinsaite oder vielmehr ihres Mittelpunkts mit constanter Geschwindigkeit vor sich gehe, nichts Anstossendes enthält. Ja, prüfen wir die Hypothese für andere Verhältnisse von $m\mu$ und $m\nu$, so bestätigt sich ihre Richtigkeit, die sich aber ausserdem, wie Helmholtz gezeigt, auch auf theoretischem Wege bestätigen lässt.

Es leuchtet ein, wie man statt des Mittelpunktes jeden andern Punkt auf der Länge der Saite in seiner Bewegung erforschen kann, wie man schliesslich hieraus die Bewegung der ganzen Saite ihrer Natur nach kennen lernen kann.

§. 17.

Apparate zur unmittelbaren graphischen Darstellung von Schwingungscurven.

1. Die Idee: durch einen schwingenden Körper, wie etwa eine Stimmgabel, an deren einem Ende ein spitzer Stift angebracht ist, die Schwingungen unmittelbar auf eine passende Unterlage eingràviren zu lassen, rührt von Wilhelm Weber her und findet sich deutlich ausgesprochen in dem musikalischen Lexicon von Schilling im Artikel »Akustik«, dessen Verfasser der genannte Gelehrte ist. Unter den verschiedenen Methoden, die absolute Tonhöhe zu bestimmen, führt er nämlich auch folgende als eine sehr directe an: man befestige an dem Ende

6*

eines Zinkens einer Stimmgabel einen feinen Stift senkrecht zur Schwingungsebene derselben, versetze die Gabel in Schwingung und führe sie so über eine ebene Unterlage hin, dass die Spitze des Stifts hierbei einen auf der Unterlage gleichmässig aufgetragenen Ueberzug wegkratzt und somit eine bleibende Figur erzeugt, deren Form offenbar von der Bewegung der Hand und der Anzahl der Schwingungen abhängt. Wird die Gabel in gerader Linie in der Richtung *hh*, Fig. 45, Taf. IV verschoben, so ist einleuchtend, wie der Stift eine zickzackartige Curve beschreibt, deren Zacken wir nur zu zählen brauchen, um sofort mit Rücksicht auf die Zeit der progressiven Bewegung die absolute Zahl der Schwingungen zu erhalten.

2. Von dieser Idee ausgehend, sind in neuerer Zeit durch die Bemühungen Wertheim's, Scott's und namentlich des Mechanikers Koenig in Paris, einige Apparate construirt worden, welche von der Wissenschaft nur freudig begrüsst werden konnten.

Den soeben erwähnten Versuch kann man in der That mit Leichtigkeit anstellen, wenn man auf horizontaler Unterlage ein Blatt Papier aufklebt, dieses über einer Oellampe möglichst regelmässig mit Russ überzieht, und nun die Gabel in geeigneter Entfernung und parallel ihrer Anfangsstellung über dem Blatte verschiebt. Da eine solche regelmässige Verschiebung mit der Hand nicht gut auszuführen ist, so kann man die Gabel mit einer Art Schlittenvorrichtung verschieben. Denselben Zweck hätte man offenbar auch dadurch erreicht, dass man die Gabel ein für allemal fest hält und statt dessen das Papier unter ihr wegzieht, ein Verfahren, das einfacher ist als das erstere. Denselben Zweck erreichte man aber auch dadurch, dass man das berusste Papier statt auf ebener Unterlage auf einem gut gearbeiteten Cylinder aufwickelte und diesen um seine Axe herumdrehte.

Will man in der That auf diese Art die absolute Zahl der Schwingungen einer Gabel oder eines schwingenden Stabes bestimmen, so ist offenbar nur nöthig, den genauen Anfangspunkt und Endpunkt eines Zeittheils, etwa einer Secunde, auf oder neben der zickzackartigen Figur zu bezeichnen. Sind diese Grenzen mit Rücksicht auf die Zeit genau, so braucht

innerhalb derselben die Bewegung des Cylinders keine gleichmässige zu sein: die Zahl der Zacken zwischen den Grenzen giebt ein für allemal die Anzahl der Schwingungen an. Um diese also zu erhalten, ist es nicht erforderlich, die Walze mittelst eines Uhrwerks in gleichmässige Drehung zu versetzen, sondern es genügt, sie mit der Hand herumzudrehen und auf irgend eine Weise neben der Zeichnung der Gabel am Ende der ersten, zweiten etc. Secunde Marken zu machen, etwa so, wie ich durch die Fig. 46, Taf. IV erläutern möchte. Ueber die Walze *C*, welche an der Curbel *h* auf gehörigen Lagern drehbar ist, hängt ein Pendel, dessen Kugel möglichst schwer und unten mit einer ganz ähnlichen Spitze versehen ist, wie der eine Gabelzinken vorn. Schwingt das Pendel in dem Bogen *ss* hin und her, so macht es mit der Spitze, sobald es die Lage *cd* nahezu erreicht, in dem russigen Ueberzug einen kurzen geraden Strich. Wird nun mittlerweile die Gabel zum Tönen gebracht und der Cylinder umgedreht, so ist klar, wie durch die Bewegung des Pendels in gleichen Zeitabschnitten quer durch die Zickzacklinie der Gabel kleine Striche *aa* gemacht werden. War das Pendel ein Secundenpendel, so giebt die Zahl der zwischen zwei benachbarten Strichen wie *aa* gelegenen Ein- oder Ausbiegungen der Gabellinie sofort die absolute Zahl der Schwingungen an. Es ist aber keineswegs nöthig, dass das Pendel ein Secundenpendel sei, da man ja nach dem Versuch immer eine Reduction auf die Secunde leicht vornehmen kann.

Da nach einmaliger Umdrehung des Cylinders das Schreibstiftchen der Gabel wieder ins Bereich der schon markirten Wellenlinie gelangt und somit diese bei weiterem Drehen theilweise in ihrer Deutlichkeit stören würde, so hat man, um dies zu vermeiden, dem Cylinder noch eine progressive Bewegung verschafft, dadurch, dass das eine Ende seiner Axe in einer Schraubenmutter läuft, wodurch also die Wellenlinie der Gabel sich schraubenförmig um den Cylinder herum windet, ohne die Erreichung des genannten Zweckes zu beeinträchtigen.

Was das Material betrifft, woraus der Cylinder angefertigt werden kann, so thut man am besten, wie es in der Werkstatt von Koenig auch geschieht, Metall zu wählen. Ich glaube jedoch, dass man recht gut einen Cylinder von Gyps anfertigen

kann, der Temperatureinflüssen nicht nachgiebt und hinlänglich genau abgedreht werden kann. Statt ihn zu berussen, berusst man ein Papier, legt dies glatt um ihn herum und befestigt es in gehöriger Weise. Nach beendetem Versuch nimmt man dies ab, wodurch der Cylinder zu weiteren Versuchen wieder disponibel wird.

Bei dem Apparate von KOENIG werden die Marken, welche in Fig. 46, Taf. IV unser Pendel macht, in anderer Weise gezeichnet. Nämlich ausser der Gabel, welche die Sinuslinie beschreiben soll, ist vor dem Cylinder ein zweiter Apparat aufgestellt, bei welchem durch den electrischen Strom ein kleiner Stift bald vorgeschoben wird, so dass er den Cylinder berührt, bald zurückgezogen wird, jenachdem eben der Strom sich schliesst oder öffnet. Die regelmässige Schliessung und Oeffnung des Stroms geschieht durch eine Pendelvorrichtung. Aus dieser Einrichtung folgt, dass der zweite Stift neben der Wellenlinie der Gabel eine gerade Linie eingräbt, deren Strecke anfängt mit einem Schluss und aufhört mit einer Oeffnung des Stroms. Anfang und Ende einer solchen Strecke liegen demnach um die Zeit einer Schwingung des Pendels auseinander. In Fig. 47, Taf. IV ist ein Stück einer Wellencurve einer Gabel, die von einem Stromschlusse bis zum nächsten 62 Schwingungen ausführt, genau nach der Natur wiedergegeben. Aus einer, mir soeben von Herrn KOENIG in Paris übersandten, Sammlung von Photographieen akustischer Apparate ersehe ich, dass man einfacher Weise die Pendelvorrichtung ersetzen kann durch eine zweite Gabel, welche gleichzeitig neben der ersten auf dem Cylinder schreibt, wobei aber die eine ihrer Schwingungszahl nach bekannt sein muss. Denn befinden sich zwei Wellenzüge nebeneinander, und weiss man, dass die eine Gabel 500 Schwingungen in der Secunde macht, und fallen etwa 30 von diesen Zacken neben 25 der unbekannten Gabel, so ist die Schwingungszahl der letzteren offenbar $\frac{500}{30} . 25$ gleich 416,6.

3. Dieser soeben beschriebene Apparat wurde meines Wissens zunächst von DUHAMEL angegeben, nachher von WERTHEIM und zuletzt von KOENIG vervollkommnet, so dass er eigentlich den Namen Phonautograph von DUHAMEL verdient.

Die absolute Zahl der Schwingungen einer Gabel zu bestimmen, ist nicht die alleinige Nutzanwendung desselben. In gleicher Weise lässt sich das Phänomen der Schwebungen graphisch darstellen. Zu dem Ende ist nur nöthig, dass man den obigen Versuch zweimal wiederholt von derselben Stelle des Cylinders aus, wobei aber jetzt erforderlich ist, dass die Bewegung des Cylinders ganz gleichförmig vor sich geht. Bei der Darstellung des zweiten Wellenzugs belastet man die Stimmgabel etwas, wodurch sie in derselben Zeit einige Schwingungen weniger macht als bei dem Beschreiben des ersten Wellenzugs. Da beide übereinander liegen, so wenden sich die Stellen, an welchen die Schwebungen in Wirklichkeit stattgefunden hätten, wenn man zwei Gabeln gleichzeitig auf den Apparat hätte schreiben lassen, deutlich zu erkennen geben.

In gleicher Weise lassen sich die Obertöne eines klingenden Körpers, wie einer Stimmgabel oder eines Stabes darstellen, wobei offenbar die vom Grundton herrührende einfache Wellencurve noch kleine, mehr oder weniger zahlreiche Kräuselungen oder Zähnchen bekommt. Jedoch wird hierzu erforderlich sein, dass man auf eine sichere Art einen Oberton stark neben dem Grundtone hervorbringt.

4. Es giebt noch ein Mittel, wodurch man die Curven des ersten Capitels direct darstellen kann in einer, dem Vorausgehenden entsprechenden, Art. Dieses Mittel will ich durch Fig. 48, Taf. IV erläutern. *M* stellt eine Stimmgabel vor, welche vorn an dem einen Zinken *a* eine Glassplatte *AA* trägt, welche durch ein Gegengewicht am andern Zinken a_1 äquilibrirt und ausserdem so befestigt ist, dass die Gabel überhaupt Schwingungen ausführen kann. Ueber diese Glasplatte wird eine zweite Stimmgabel *N* so gehalten, dass eine kleine Spitze, welche am vordern Ende von *b* befestigt ist, die Platte eben berührt. Ueberzieht man die Glasplatte aber mit Russ und setzt beide Gabeln gleichzeitig in Bewegung, so ist klar, wie durch die Bewegung der Glasplatte die eine, durch die Bewegung des Schreibstifts die andere geradlinige Bewegung gegeben ist, wie demnach bei gemeinsamer Bewegung jene Curven entstehen müssen, die wir im ersten und zweiten Capitel betrachtet haben. Der Maasstab dieser Curven wird zwar nicht sehr

gross, jedoch wohl immerhin so, dass man den Vorgang deutlich übersieht. Brächte man, während beide Gabeln schwingen, die eine Gabel *M* in eine progressive Bewegung, wie der Pfeil andeuten soll, so würde man, falls die Glasplatte lang genug ist, graphische Darstellungen erhalten, analog denen, welche mit Hilfe des eben beschriebenen Phonautographs erhalten werden können. In der That sehe ich aus der eben erwähnten Sammlung von Photographieen, dass Herr Koenig bereits Apparate construirt hat, bei welcher zwei Stimmgabeln mit den Glasplatten parallel oder unter rechten Winkeln gegen einander verschoben werden können.

5. Von besonderem Interesse ist noch ein Apparat, welcher von Scott angegeben und von Koenig in Paris ausgeführt wurde: nämlich der Phonautograph von Scott, welcher sich von dem Duhamel's dadurch unterscheidet, dass statt der Stimmgabel eine feine Membran benutzt wird, um mittelst eines Stiftchens ihre Schwingungen auf den rotirenden Cylinder zu übertragen. Die nähere Einrichtung ist aus der Fig. 49, Taf. IV zu ersehen. *C* war ursprünglich ein etwa 50 Ctm. langes Ellipsoid, von Gyps gearbeitet und dazu bestimmt, an dem einen offenen Ende *d* Schallwellen aufzunehmen und nach dem andern Ende, das durch eine dünne Membran *M* von Kautschuk oder Goldschlägerhaut geschlossen ist, zu übertragen. Später hat Koenig den Gyps durch Metall, das Ellipsoid durch ein Paraboloid ersetzt. *b* ist ein leichtes, aber steifes Stiftchen, das schief auf die Membran aufgeklebt ist, und dessen Spitze bei der Bewegung derselben hin und hergeht, vorausgesetzt, dass nicht gerade das Fussende des Stiftchens auf eine Knotenlinie der Membran zu liegen kommt. Dieses zu verhindern, dient das Stäbchen *a*, welches verschoben werden kann, und so eine ursprüngliche Lage der Knotenlinie ändert. Der ganze bis jetzt beschriebene Apparat ist auf einem passenden Gestell angebracht und wird bei einem wirklichen Versuche soweit an den rotirenden Cylinder herangeschoben, dass eben die Spitze von *b* gerade die berusste Fläche von letzterem berührt und so ihre charakteristischen Furchen eingräbt.

Die grosse Empfindlichkeit der Membranen einem tönenden Körper gegenüber macht sie zu einer Reihe von Versuchen äusserst schätzenswerth. Sie reagiren nicht nur auf diesen

oder jenen bestimmten Ton ausschliesslich, sondern fast jeder Ton setzt sie, wenn auch nur schwach in Erzitterung, und zwar gilt dieses besonders von ganz kleinen Membranen. Denn das Trommelfell unseres Ohrs verhält sich beinahe allen Tönen gegenüber gleichförmig bezüglich auf die Fortleitung derselben. Deshalb kann der eben beschriebene Phonautograph da gute Dienste leisten, wo es sich darum handelt, den Ton einer schwingenden Luftsäule graphisch darzustellen, und ich bin überzeugt, dass dieser Apparat neben schon vorhandenen Resultaten noch manches andere Nützliche und Interessante hinzuliefert, falls man sich bemüht, und Herrn Koenig ist es wohl schon gelungen, eine möglichst grosse Resonanzfähigkeit des Schallbechers *C* und der Membran *M* mit einander zu verbinden. Die graphische Darstellung zweier und wohl auch mehrerer gleichzeitiger Töne von Blasinstrumenten, speciell die Schwebungen, sowie namentlich die Darstellung der Obertöne, also der Klangfarbe eines bestimmten Instrumentes, falls jene nicht allzu schwach sind, lässt sich in beschriebener Weise darstellen.

Die Fig. 50 *a*, *b*, *c*, Taf. IV giebt einige Beispiele dieser graphischen Darstellung. Zwei Orgelpfeifen ertönten gleichzeitig bei *d* Fig. 49, wobei die Curve *a* entstand, wenn Grundton und Secunde, *b* wenn Grundton und Quinte, *c* wenn Grundton und Octave combinirt wurden.

Es liegt nicht in meiner Absicht, hier noch die Reihe der Apparate vorzuführen, welche speciell auf dem Gebiete der Physiologie Anwendung gefunden haben, und welche die Aufgabe lösen sollen, eine Bewegung eines Körpertheils, wie etwa die Herzbewegung, in graphischer Weise zu versinnlichen.

6. Noch möge hier erwähnt werden, dass man, wie auch Lissajous schon bemerkt, die Bewegung tropfbar flüssiger Körper in optisch-mechanischer Weise versinnlichen kann. Ein Gefäss Wasser oder Quecksilber setzt man in ein dunkles Zimmer und leitet auf die Oberfläche davon ein Lichtbündel, so dass dies von dem Spiegel der Flüssigkeit auf eine gegenüberstehende Wand zurückgeworfen wird. Die geringste Bewegung der Flüssigkeit verändert die Lage des reflectirten Strahls und erzeugt demnach eine Curve. Man kann mit Leichtigkeit den reflectirten Strahl anstatt auf die Wand direct zunächst

auf einen kleinen Spiegel, etwa an einer Stimmgabel befestigt, leiten und von hier erst nach einer Wand hin lenken; ein Verfahren, das in manchen Fällen genaueren Aufschluss über die Bewegung des Flüssigkeitsspiegels liefert als ersteres, besonders wenn es sich um die Schwingungszahl einer pendelartigen Bewegung des Flüssigkeitsspiegels handeln sollte.

Sechstes Capitel.

Ueber Schwingungsflächen im Allgemeinen und ins Besondere bei fadenförmigen Körpern.

---

§. 18.

Allgemeine Bemerkungen.

1. Bisher haben wir Schwingungscurven kennen gelernt als das Resultat der Bewegung eines Punktes, der als Theil eines vibrirenden Körpers gemäss der Bewegung von letzterem eine bestimmte Bahn durchlaufen musste. So haben wir bei Stäben, welche an dem einen Ende eingeklemmt waren, einen Punkt des freien Endes bei der Beschreibung von Schwingungscurven ins Auge gefasst. Offenbar wird dieser Punkt für objective oder subjective Darstellung der vortheilhafteste sein, weil er bei den Bewegungen, die wir dem Stabe geben, mit den grössten Elongationsweiten schwingt. Abgesehen hiervon könnte man ohne Zweifel auch einen beliebigen andern Punkt auf der Länge eines schwingenden Stabes mit dem Auge festhalten und seine Bahn verfolgen, wobei einleuchtet, dass diese verschiedenen Punkte auch verschiedene Bahnen beschreiben müssen, deren Verschiedenheit bedingt wird durch die relative und absolute Verschiedenheit der Elongationsweiten.

Fasst man nun auf einem schwingenden Körper eine continuirliche linienförmige Folge von Punkten ins Auge, so beschreibt diese Folge von Punkten bei der Bewegung des Körpers eine Fläche, die ich kurz eine Schwingungsfläche

nennen möchte, und es ist offenbar nicht ohne Interesse, diese eigenthümlichen Flächen etwas näher kennen zu lernen, besonders in solchen Fällen, wo sie sich deutlich fürs Auge in ihrer Continuität veranschaulichen lassen.

2. Denken wir uns einen dünnen geraden cylindrischen Stab an dem einen Ende *m* Fig. 51, Taf. IV eingeklemmt, aus der Ruhelage heraus gebogen und sich selbst überlassen, so wird derselbe bei seiner Grundschwingung sich so bewegen, dass sein freier Endpunkt sowohl wie jeder andere Punkt seiner Länge im Allgemeinen eine Ellipse beschreibt, deren Form einen Moment lang als constant angesehen werden kann. Sehen wir von der Biegung des Stabes ab, so ist klar, wie die ganze Folge von Punkten, welche die Länge des Stabes bilden, als Schwingungsfläche eine elliptische Kegelfläche erzeugt, deren Spitze in *m* liegt. Ein solcher Stab, wenn er nur lang genug ist, kann aber ausser seiner Grundschwingung auch noch eine Reihe von Partialschwingungen ausführen, wobei sich auf seiner Länge mehr oder weniger Schwingungsknoten bilden. Auch hierbei werden die Punkte zu beiden Seiten der Knotenpunkte im Allgemeinen Ellipsen beschreiben, und man kann sich mit Leichtigkeit eine Vorstellung von der Schwingungsfläche machen, die bei einer solchen Partialschwingung von der ganzen Länge des Stabes erzeugt wird. Es ist aber auch möglich, dass der Stab in einem gewissen Momente, oder längere Zeit hindurch das Bestreben hat, zwei oder mehrere Partialschwingungen zu gleicher Zeit auszuführen, z. B. neben der ersten Partialschwingung oder Grundschwingung noch die zweite zu machen. Die Schwingungsfläche, welche nun erzeugt wird, weicht begreiflicher Weise ihrer Form nach sehr von den durch eine einfache Schwingung erzeugten Flächen ab, jedoch wird man sich leicht überzeugen, dass jeder Durchschnitt, senkrecht zur Ruhelage des Stabes ausgeführt, als Durchschnitt mit der krummen Fläche im Allgemeinen eine Schwingungscurve liefert, der Art, wie sie in Cap. IV betrachtet wurden und von denen die einfachste die ist, welche der Punkt *m*, beschreibt, nämlich eine Ellipse.

3. Eine Saite, zwischen zwei festen Punkten ausgespannt, giebt bekanntlich eine grosse Reihe von einzelnen Tönen, die wir Partialtöne nennen, und wobei sie sich so abtheilt, dass auf

der ganzen Länge eine ganze Zahl halber Wellenlängen sich bilden, von denen jede durch zwei feste Punkte, Knotenpunkte begrenzt wird. Eine solche Saite kann aber auch gleichzeitig zwei oder mehr Partialtöne erklingen lassen, wobei die Fläche, welche sie beschreibt, eine complicirtere und unter Umständen sehr mannigfaltige Form erhält. Gesetzt nämlich, die Saite liesse nur zwei Partialtöne gleichzeitig ertönen, so kann:

der eine durch ebene, der andere durch ebene,
„ „ „ elliptische, „ „ „ ebene,
„ „ „ ebene, „ „ „ elliptische,
„ „ „ elliptische, „ „ „ elliptische

Schwingungen erzeugt werden, so dass man vier Hauptformen von Schwingungsflächen zu erwarten hat. Jede dieser Hauptarten bekommt dadurch wiederum eine grosse Mannigfaltigkeit, dass die Phasendifferenz zwischen der einen und der andern einfachen Schwingung bald diesen, bald jenen Werth erreicht, eine Mannigfaltigkeit, welche in diesem Falle schon eine unendliche ist, und vielmehr noch dann, sobald wir an die Formen denken, welche bei dem gleichzeitigen Auftreten einer grössern Anzahl von Partialtönen zum Vorschein kommen.

Diese interessanten Flächen in Wirklichkeit und in sicherer Weise zu erzeugen, so dass das Auge des Beobachters ihre Form deutlich und ohne Mühe erkennt, war die Aufgabe, welche ich in den letzten Jahren zu lösen mich bemüht habe, und es ist mir gelungen, eine Methode ausfindig zu machen, welche meines Erachtens nichts zu wünschen übrig lässt, falls man sich auf jene Formen der Schwingungsflächen beschränkt, welche durch das Zusammentreffen zweier Partialschwingungen erzeugt werden. Ich habe einen Theil dieser Untersuchungen bereits früher*) veröffentlicht und werde hier auf diese Arbeiten insoweit zurückkommen müssen, als sie mit später gefundenen Resultaten, namentlich in Bezug auf die gegenwärtige Arbeit, im Zusammenhange stehen.

*) Pogg. Ann. Bd. CIX. S. 193 und Bd. CXI. S. 1.

§. 19.

Beschreibung eines Apparats zur deutlichen Sichtbarmachung einfacher Partialschwingungen. Combination zweier einfachen Partialschwingungen mit dem Schwingungsverhältnis 1 : 2.

1. Will man ein Seil in stehende Wellenbewegung versetzen, so knüpft man es mit einen Ende fest und bewegt das andere Ende mit der Hand in einem bestimmten, der Spannung entsprechenden Tempo, so auf und nieder oder in einem kleinen Kreise herum, dass durch eine Folge von fortlaufenden Wellen schliesslich stehende erzeugt werden. Jedoch Jeder, der diesen Versuch in gelungener Weise anstellen will, wird bemerken, dass er mit besondern Schwierigkeiten verbunden ist, weil eben eine sehr geschickte Bewegung der Hand erforderlich ist, die auf einige Zeit hin unmöglich wird. Aber Bewegungen, welche die Hand nicht regelmässig ausführen kann, vollbringt mit Leichtigkeit irgend ein schwingender Körper, ein am Ende eingeklemmter Metallstab oder eine Stimmgabel, und man begreift, wie man die unsichere Hand leicht ersetzen kann durch einen schwingenden Körper. Um diese Idee zu verwirklichen, nahm ich eine Stimmgabel, schraubte sie so, dass ihre Axe horizontal war, an geeigneter Stelle ein, befestigte an einem ihrer Zinken einen Zwirnsfaden und spannte diesen an einer andern Stelle durch einen Wirbel an. Das Anstreichen der Gabel geschah durch ein sogenanntes Streichstäbchen, das an einem Ende des einen Zinkens befestigt und mit nassen Fingern gerieben wurde. Sobald der Faden die, der Anzahl der Schwingungen der Gabel entsprechende, Spannung erhalten hatte, bildeten sich beim Anstreichen die halben Wellen mit den Knotenpunkten in schönster Weise. Die Gabel liess sich um ihre Axe drehen und ihre Schwingungen wirkten demnach bald in dieser, bald in jener Ebene zur Verticalebene geneigt auf den Faden ein. Auch den Faden neigte ich aus seiner horizontalen Lage heraus und fand ganz bestimmte Abänderungen seiner Schwingungsweise.

2. Um diese Verschiedenheiten in der Form der Fadenschwingungen bei verschiedenen Lagen des Fadens und verschiedenen Stellungen der Gabel genauer zu erforschen, fand ich mich bewogen, folgenden Apparat zu construiren. *A* und *B* Fig. 52,

Taf. IV stellen zwei Holzstücke vor, von denen *B* zunächst dazu bestimmt ist, an eine Tischplatte fest geschraubt zu werden. Um die Axe *a* des Stück *B* lässt sich *A* um 90⁰ Grad von vorn nach hinten herumdrehen, und mittelst der Schraubenmutter *s* in einer der diesen Grenzen entsprechenden Lagen feststellen. In ähnlicher Weise dreht sich um die Axe *a*, die, etwa 1 Meter lange, Leiste *C* und kann unter einem beliebigen Winkel, soweit es eben die Tischplatte und die übrige Einrichtung des Apparats erlaubt, durch eine Schraubenmutter festgestellt werden. Das Stück *A* trägt eine Stimmgabel, welche etwa 256 Schwingungen in der Secunde vollbringt. Diese Stimmgabel ist unten mit einem Schraubengewinde versehen und kann so um einen beliebigen Winkel aus einer Anfangslage herausgedreht werden. Der eine Zinken (in der Figur der linke) trägt eine Hülse, welche auf einem Messingplättchen aufgeschraubt ist, wie die Fig. 52 *a*, Taf. IV zeigt, der andere Zinken das Streichstäbchen. Auf der Leiste *C* ist eine Klemme *k* verschiebbar und kann an irgend einer Stelle von *C* durch eine Schraube festgestellt werden. Um nun stehende Wellenbewegungen zu erzeugen, zieht man durch die Hülse *h* einen schwarzen Seidenfaden oder Zwirnsfaden oder auch eine dünne Saite, befestigt das eine Ende davon an dem Zapfen *d*, das andere in der Klemme *k* und streicht mit nassen Fingern die Gabel an. Ist die Spannung durch Umdrehen des Zapfens *d* gehörig regulirt, so wird der Faden in Bewegung gerathen in einer Weise, die sogleich näher bezeichnet werden soll.

3. Den Einrichtungen des Apparats gemäss sind folgende Hauptstellungen der Gabel und Lagen des Fadens möglich. Erstens: die Gabel steht so, wie in der Figur angedeutet, nämlich so, dass ihre Schwingungsebene zu gleicher Zeit durch die Länge des Fadens geht. Diese Stellung wollen wir Parallelstellung der Gabel nennen und kurz mit *P* bezeichnen. Zweitens: die Gabel steht so, dass ihre Schwingungsebene um 90⁰ Grad gegen die Stellung *P* geneigt ist; diese Stellung wollen wir Transversalstellung nennen und kurz mit *T* bezeichnen. Eine zwischen *P* und *T* liegende Stellung werde Mittelstellung genannt und kurz mit *M* bezeichnet. Bei jeder dieser Stellungen kann der Faden entweder horizontal liegen, oder vertical oder auch schief gegen den Horizont geneigt

sein und es mögen diese Lagen einfach mit L_h, L_v und L_m bezeichnet werden. Alle diese Stellungen und Lagen lassen sich erreichen durch Umdrehen der Gabel um ihre Axe und durch Umdrehen der Leiste C. Die Drehung um die Axe a ist für das Folgende von keiner Bedeutung, und ich habe sie nur deshalb angebracht, um Versuche über etwaige Spiralruhelinien bei schwingenden Saiten anstellen zu können.

Dies vorausgesetzt, leuchtet Folgendes ein: Die Gabel schwingt so, dass der Punkt m Fig. 52 a, Taf. IV in einem kleinen Bogen auf- und absteigt. Diesen halben kleinen Bogen können wir als geradlinig ansehen und in zwei zu einander rechtwinklige Componenten zerlegen, von denen die eine horizontal (bei der Stellung der Gabel in der Fig. 52), die andere vertical, jedoch beide in der Schwingungsebene der Gabel gelegen sind. Ohne Zweifel ist die erstere Componente grösser als die letztere und wird daher auch unter Umständen eine bedeutendere Wirkung ausüben. Befindet sich der Faden in der Lage L_h, so wirkt die erstere Componente in longitudinaler Richtung, letztere in transversaler auf den Faden ein. Befindet sich bei derselben Lage des Fadens die Gabel in der Stellung T, so wirken beide Componenten transversal auf den Faden. Nimmt der Faden bei irgend einer Stellung der Gabel die Lage L_v an, so wirkt die erstere transversal, die letztere longitudinal ein. Steht die Gabel irgendwie und liegt der Faden irgendwie in einer Lage L_m, so werden sich die beiden Componenten als longitudinale und transversale noch weiter, aber in diesem beiderseitigen Sinne, zerlegen lassen.

4. Die Einrichtung meines Apparates gestattet diese beiden Schwingungscomponenten der Gabel in allen Grössen, welche sie überhaupt annehmen können, auf den Faden einwirken zu lassen und mit Leichtigkeit die stehende Wellenbewegung bei letzterem zu beobachten. Die Resultate dieser Versuche sind nun folgende, deren einzelne Begründung ich in den genannten beiden Abhandlungen gegeben zu haben glaube.

a) Die Schwingungen des Fadens, von der transversalen Componente herrührend, sind doppelt so schnell als die durch die longitutinalen erzeugten.

b) Besitzt der Faden eine solche Spannung, dass er mit der Gabel genau unisono klingt, so schwingt er der ganzen

Länge nach, 1 halbe Wellenlänge bildend, wenn die transversale Componente einwirkt. Diese betreffende Spannung wollen wir S_{-1} nennen.

c) Soll er dagegen bei der Einwirkung der longitudinalen Componente dieselbe Schwingungsart ausführen, so muss er gemäss *a* die tiefere Octave von dem, bei der Spannung S_{-1} erzeugten Ton, d. h. dem Gabeltone bilden. Diese Spannung möge s_{-1} heissen.

d) Soll er die Reihe der harmonischen Schwingungsarten durchmachen, so muss er so gespannt werden, dass die Hälfte, das Drittel, Viertel u. s. w. von ihm denselben Ton giebt, als die ganze Länge bei der Spannung S_{-1} oder s_{-1}.

e) Aus dem unter *d* und *b* Bemerkten folgt, dass er bei der Erregung durch die transversale Componente allein

1	halbe	Wellenlänge	bildet	bei	der	Spannung	S_{-1}
2	"	"	"	"	"	"	S_{-2}
3	"	"	"	"	"	"	S_{-3}
4	"	"	"	"	"	"	S_{-4}
5	"	"	"	"	"	"	S_{-5}
6	"	"	"	"	"	"	S_{-6}
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

wenn wir nämlich die nach und nach geringeren Spannungen, bei welchen die verschiedenen harmonischen Schwingungen zum Vorschein kommen, mit negativen Indices andeuten.

f) Aus *c* folgt aber dann auch, dass unter dem alleinigen Einflusse der longitudinalen Componente der Faden bildet:

1	halbe	Wellenlänge	bei	der	Spannung	s_{-1}
2	"	"	"	"	"	s_{-2}
3	"	"	"	"	"	s_{-3}
4	"	"	"	"	"	s_{-4}
5	"	"	"	"	"	s_{-5}
6	"	"	"	"	"	s_{-6}
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

g) Da aber die Spannung:

S_{-2}	gleich	der	Spannung	s_{-1}
S_{-4}	"	"	"	s_{-2}
S_{-6}	"	"	"	s_{-3}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
S_{-2n}	"	"	"	s_{-n}

so folgt, dass, so oft der Faden unter dem Einflusse der longitudinalen Componente n halbe Wellenlängen bildet, bei ungeänderter Spannung unter dem Einflusse der transversalen Componente $2n$ halbe Wellenlängen zum Vorschein kommen.

h) Daraus folgt aber, dass, wenn die longitudinale und transversale Componente, wie es bei verschiedenen Stellungen der Gabel und Lagen des Fadens in der That der Fall ist, gleichzeitig wirken, dann zwei Schwingungsbewegungen, deren Schwingungszahlen sich wie 1 : 2 verhalten, gleichzeitig auftreten und der Faden dem entsprechend eine Schwingungsfläche beschreibt, deren Form wesentlich von der, jeder Componente einzeln entsprechenden Schwingungsfläche abweicht, eine Fläche, welche senkrecht zur Ruhelage des Fadens durchschnitten, eine Schwingungscurve liefert, deren Schwingungszahlen sich auch wie 1 : 2 verhalten.

i) Die Versuche mit Hilfe einer Gabel in der angegebenen Weise, einen Faden in stehende Wellenbewegung zu versetzen, zeigen jedoch, dass in den Stellungen der Gabel und Lagen des Fadens, wo eine der Componenten die andere an Grösse stark übertrifft, meistens nur auch die der grösseren Componente entsprechende Bewegung entsteht. So z. B. zeigt der Faden bei den Spannungen s_{-1}, s_{-2}, ... wenn sich die Gabel in der Stellung P der Faden in der Lage L_h befindet, nur die Bewegung, welche von der longitudinalen Componente herrührt, d. h. 1, 2 ... und nicht auch gleichzeitig die doppelte Anzahl halber Wellen. So zeigt ferner der Faden in der Stellung T und Lage L_h oder in der Lage L_v und einer beliebigen Stellung der Gabel meistens nur die Schwingungen, welche durch die transversale Componente erzeugt werden, indem ja letztere in den angegebenen beiden Fällen so gross ist, als die longitudinale Componente bei der Stellung P und der Lage L_h.

Es folgt aus diesen Angaben, dass die unter *h* angedeuteten Combinirungen zweier Schwingungsbewegungen mit dem Schwingungsverhältnis 1 : 2 nur auftreten können bei einer zwischen der Stellung P und T liegenden Stellung der Gabel und bei horizontalem Faden, oder bei irgend einer Stellung der Gabel und einer geneigten Lage des Fadens.

k) Wird eine Wellenbewegung durch transversale Schwingungen der Gabel erzeugt, so schwingt der Faden, wenn er

genau die Spannungen besitzt, welche oben mit s_{-1}, s_{-2} ... bezeichnet wurden, in einer Ebene und zwar einer Ebene, die zugleich durch die grössere transversale Componente läuft. So z. B. bei der Stellung T und Lage L_h in einer horizontalen Ebene, bei der Lage L_v und einer beliebigen Azimuthalstellung der Gabel in einer Verticalebene und zwar von derselben Azimuthalstellung der Gabel. — Macht man jedoch die Spannungen ein klein wenig niedriger, so gehen die ebenen Schwingungen in elliptische und kreisförmige über, welche Schwingungsarten sich auch dadurch hervorbringen lassen, dass man bei ungeänderter Spannung durch verschiebbare Gewichte, die von vorn herein an den Gabelzinken angebracht werden, die Gabel etwas höher stimmt.

Auch die longitudinale Componente erzeugt bald ebene, bald elliptische Schwingungen des Fadens, je nachdem man stärker oder schwächer streicht.

l) Aus diesen Mittheilungen geht hervor, dass man mit einer Stimmgabel im Stande ist, einen Faden (Saite) so in eine stehende Wellenbewegung zu versetzen, dass die Schwingungsfläche, welche er hierbei beschreibt, senkrecht zur Ruhelage des Fadens durchschnitten, als Durchschnittsfigur eine Curve liefert, die den zweiten Horizontalreihen der Curventafeln V bis XI angehört. Für das Auge lässt sich dies einfach dadurch deutlich machen, dass man einen schwarzen Faden wählt und an verschiedenen Stellen feine weisse Punkte anbringt.

Offenbar kommt es auf den Moment an, von welchem zu der vorhandenen einen Bewegung noch die andere hinzutritt, oder kurz auf die zwischen beiden Bewegungen bestehende Phasendifferenz. Meine Versuche haben mich gelehrt, dass man diese durch langsameres oder stärkeres Streichen, durch eine kleine Veränderung der Spannung ändern kann, so dass man also im Stande ist, eine grosse Reihe von Schwingungsflächen auf das Deutlichste dem Auge vorzuführen.

§. 20.

Die harmonischen Schwingungsflächen überhaupt.

1. Das Phänomen des gleichzeitigen Ertönens zweier oder mehrerer harmonischer Töne einer schwingenden Saite ist interessant genug, um den Wunsch zu äussern, in vergrössertem

Maasstabe die Fläche zu übersehen, welche bei diesem Zusammenklang beschrieben wird, und diesen Wunsch zu erfüllen, habe ich obige Methode, einen fadenförmigen Körper in stehende Wellenbewegung zu versetzen, so erweitert, dass man mit Leichtigkeit im Stande ist, zunächst den Zusammenklang zweier beliebigen harmonischer Töne, wenn sie nur nicht zu den allzuhohen gehören, zu veranschaulichen, d. h. eine Reihe von Schwingungsflächen darzustellen, welche entstehen durch das gleichzeitige Auftreten zweier Vibrationsbewegungen, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie 1 : 1 oder 1 : 2 oder 1 : 3 oder 1 : 4 und wohl auch noch Verbindungen von höhern harmonischen Schwingungen mit der Grundschwingung; ebenso die Verbindungen zweier Schwingungen, deren Schwingungsverhältnis wie 2 : 3 oder 3 : 4 ist.

2. Zu dem Ende nahm ich zwei Stimmgabeln; eine davon war so tief, dass sie nahezu das *F* der grossen Octave angab, die andere dagegen nahezu das *c* der eingestrichenen Octave, so dass diese Gabeln genau das Verhältnis 1 : 3 besassen, falls man nur die eine oder andere etwas erhöhte oder vertiefte. Die tiefere Gabel war zu dem Ende mit zwei, längs den Zinken verschiebbaren, Gewichten versehen, welche nach dem Stiele zu gerückt den Ton höher machten und, in entgegengesetzter Richtung bewegt, ihn vertieften. Beide Stimmgabeln wurden mit ihren Füssen in zwei starke Holzstücke *A* geschraubt und letztere mittelst Schraubzwingen an einem Tische befestigt, sowie die Fig. 54, Taf. IV andeutet. An dem einen Zinken jeder Gabel war ein Messingplättchen *r* und *s* befestigt und mit einem Löchelchen durchbohrt, so dass, wenn die Stimmgabeln richtig centrirt waren, eine durch diese Löchelchen gelegte Gerade mit den Axen der ersteren zusammenfiel. Ein Faden wurde bei *a* durchs eine Plättchen *s* gezogen, von hier nach *b* durchs andere und von hier nach dem Wirbelchen *e*, um so mittelst dieses die geeignete Spannung zu erhalten. Das Anstreichen der Gabeln geschah durch Streichen der Stäbchen *c* und *d* mittelst nasser Finger. Um nun wirklich die Schwingungsflächen mit dem Verhältnisse 1 : 3 zu combiniren, spannt man den Faden so, dass, wenn die hohe Gabel *N* allein angestrichen wird, man deutlich drei halbe Wellen erblickt; setzt nun die grosse Gabel *M* allein angestrichen den Faden mit einer halben Welle in Bewegung,

so wird das gleichzeitige Anstreichen zum gewünschten Ziele führen; ist letzteres nicht der Fall, so kann man mittelst der Gewichte den Ton der grossen Gabel reguliren, ohne die für die Gabel *N* bereits richtig getroffene Spannung zu ändern.

Ist das Verhältnis genau getroffen, so wird der Faden, wenn regelmässig gestrichen wird, eine constante Bewegung annehmen, im entgegengesetzten Fall dagegen eine Reihe von Phasen durchlaufen, aber jedenfalls wird man selbst in diesem Falle aus den Curven, welche die weissen Punkte des schwarzen Fadens beschreiben, erkennen, dass sie in die dritten Horizontalreihen der Curventafeln gehören.

Wir haben im vorigen §. unter *k* gesehen, dass der Faden, wenn die Gabel transversal auf ihn schwingt, ebene Schwingungen vollbringt, vorausgesetzt, dass die Spannung genau ist. Der Apparat Fig. 54, Taf. IV gestattet die Schwingungsebene jeder Gabel einfach durch Umdrehen der letztern anders gegen den Horizont zu neigen, und da sich gemäss *k* im vorigen §. die Schwingungsebene des Fadens mitdreht, so kann man, wie es auch in Fig. 54, Taf. IV dargestellt ist, die Schwingungsebenen der Gabeln rechtwinklig zu einander stellen, und somit also bewirken, dass zwei zu einander rechtwinklige oder irgendwie geneigte ebene Vibrationsbewegungen den Faden angreifen.

3. Unter *k* im vorigen §. wurde auch erwähnt, dass, wenn man die Spannung ein klein wenig niedriger mache als der Ton der Gabel, man den Faden in elliptische Schwingungen versetzen könne. Wendet man alle diese Bemerkungen gehörig an, so lassen sich mit zwei solchen Gabeln eine grosse Menge von Schwingungsflächen darstellen, von denen ich nur kurz noch Folgendes anführen will. Bei einer Gabel allein erhält man immer wirkliche Knotenpunkte, falls eben hierbei der Faden nur einfache Aliquotschwingungen macht; schwingt dagegen die zweite Gabel mit, so können an Stellen der Punkte auch gerade Linien oder Ellipsen auftreten, und zwar hängt dies von der Zahl der halben Wellen und davon ab, ob die Bewegungen, wenn jede allein auftritt, elliptische oder ebene sind. Denn combiniren sich Fig. 55, Taf. IV die Bewegungen *A* und *B* und ist *A* elliptisch, so wird der Punkt *n* bei der combinirten Bewegung eine Ellipse beschreiben müssen; combiniren sich *A* und *C*, so beschreiben die Punkte *n*, wenn *A* ebene Schwingungen sind, gerade Linien,

dagegen bei elliptischen Schwingungen von *A* Ellipsen; combiniren sich *B* und *C*, so erhält man entweder auf der Fläche drei Gerade von den Punkten *n*, wenn nämlich *B* und *C* ebene Schwingungen sind, oder eine Gerade und zwei Ellipsen, wenn *C* eben und *B* elliptisch oder umgekehrt, wenn *C* elliptisch und *B* eben; combiniren sich *B* und *D*, so leuchtet ein, dass der Mittelpunkt des Fadens bei der combinirten Bewegung stets ein Punkt bleibt, während die Stellen, wo die beiden andern Knotenpunkte der Bewegung *D* hin zu liegen kämen, entweder Ellipsen oder Gerade beschreiben, je nachdem *B* elliptisch oder eben ist.

Allgemein lässt sich in dieser Beziehung sagen: Wenn *M* und *N* zwei Partialschwingungen sind mit *m* und *n* Knotenpunkten, die Endpunkte abgerechnet, so bleiben bei der combinirten Bewegung

a) diejenigen Stellen der Schwingungsfläche wirkliche Knotenpunkte, an welchen eben ein Zusammenfallen der, den einzelnen Partialschwingungen angehörenden Knotenpunkte stattfindet;

b) bleiben ausserdem noch $m_,$ und $n_,$ Knotenpunkte von *M* und *N* übrig, die sich nicht decken, so zeigt noch die Fläche:

aa) an $(m_, + n_,)$ Stellen Ellipsen, wenn *M* und *N* elliptisch sind;

bb) an $(m_, + n_,)$ Stellen Geraden, wenn *M* und *N* eben sind;

cc) an $m_,$ Stellen Ellipsen und $n_,$ Stellen Gerade, wenn *N* elliptisch und *M* eben oder umgekehrt, an $m_,$ Stellen Geraden und $n_,$ Stellen Ellipsen, wenn *M* elliptisch und *N* eben sind.

4. Es verdient jedoch noch bemerkt zu werden, dass die Einrichtung des Apparates der Fig. 54, Taf. IV auch gestattet, Schwingungsflächen zu erzeugen, deren Componenten nicht eine ganze Zahl halber Wellenlängen beträgt, und ich muss in dieser Beziehung auf die letzte der eben erwähnten und in Pogg. Ann. Bd. CXI. S. 1 von mir veröffentlichte Arbeit verweisen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man den ganzen Apparat, statt durch Streichstäbchen die Gabeln ins Tönen zu bringen, auch so einrichten kann, dass durch den electrischen Strom die Gabeln in Bewegung gesetzt werden, ganz in derselben Weise, wie wir oben gesehen haben.

Zweiter Theil.

Allgemeine Theorie der Schwingungscurven.

Siebentes Capitel.

Aufstellung der allgemeinen und besondern Gleichungen unserer Schwingungscurven. Begriffsbestimmung ihrer Lage und Form.

---

§. 21.

Die allgemeinen Gleichungen der Schwingungscurven, welche sich in geradlinige Vibrationscomponenten zerlegen lassen.

1. Wir haben im ersten Theile verschiedene Methoden kennen gelernt, um einem leuchtenden Punkte eine geradlinige Vibrationsbewegung zu ertheilen. Wir konnten zu dem Ende namentlich einen Spiegel, eine Stahllamelle und eine durch eine Stimmgabel erzitterte Saite benutzen. Wir haben auch unter 5, §. 1 gesehen, dass der Ausdruck $f.\tang 2\beta$, oder wenn β sehr klein auch $2f.\tang \beta$ die Grösse der Verschiebung des leuchtenden Punktes von der Ruhelage angiebt, falls eben ein Spiegel benutzt wird, der aus der Entfernung f nach einem Schirme oder dem Auge ein Lichtbündel reflectirt. War der Drehungswinkel β klein und f gross genug, so lehrte uns der §. 1, dass der Ausdruck $2f.\tang \beta$ auch dann die Grösse der Verschiebung des leuchtenden Punktes vom Vibrationscentrum angiebt, falls eben der Spiegel an dem einen Zinken einer Stimmgabel angebracht wird. Denken wir nicht an einen Spiegel, sondern an die Stahllamellen des Kaleidophons, deren Endpunkt jene Gerade beschreibt, so giebt der Ausdruck $l.\tang \beta$ jene Verschiebung vom Vibrationsmittelpunkt an, wenn l die Länge des Stückes und β der Winkel ist, der in

einem bestimmten Momente von dem Stabe mit seiner Ruhelage gebildet wird. Bezeichnen wir den Maximumwinkel der Elongation mit b, ferner die Schwingungsdauer des Stabes mit θ, die Schwingungszahl mit m, die, einem bestimmten Winkel β entsprechende, Zeit mit t, so leuchtet ein, dass folgende Gleichung besteht:

$$\frac{l.\tan b}{l.\tan \beta} = \frac{1}{\sin\frac{2m\pi t}{\theta}}$$

oder wenn die constante Grösse $l.\tan b$ einfach mit A und die variabele Grösse $l.\tan \beta$ mit ϱ bezeichnet wird:

$$\varrho = A.\sin\frac{2m\pi t}{\theta}.$$

Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir aber die Schwingungsdauer als die Zeiteinheit, d. h. θ als 1 annehmen und achten wir darauf, dass die Bewegung von einem bestimmten Momente ϑ an gerechnet werden kann, mit andern Worten, dass ϑ die Phasendifferenz der Bewegung, so giebt die Grösse

$$\varrho = A.\sin 2m\pi(t+\vartheta)$$

die Verschiebung vom Vibrationscentrum in irgend einem Mo- Momente t an. Da ferner die Anwendung eines Spiegels, eines Stabes oder einer Saite etc. vielleicht nur eine Aenderung der Elongationsgrenze A zur Folge hat, so ist obiger Ausdruck für ϱ als allgemeine Formel für eine geradlinige Vibrationsbewegung zu betrachten, natürlich nur unter der oft wiederholten Voraussetzung, dass nur kleine Elongationswinkel berücksichtigt werden.

2. Legen wir durch das Vibrationscentrum zwei rechtwinklige Coordinatenaxen und beziehen auf diese unsere Vibrationsbewegung, so kann letztere nach der Axe der X und Y in zwei Componenten x und y zerlegt werden, so dass

$$x = A.\sin 2m\pi(t+\vartheta).\cos\varphi$$
$$y = A.\sin 2m\pi(t+\vartheta).\sin\varphi$$

wenn eben φ den Winkel bedeutet, welchen die als positiv angenommene Richtung der geradlinigen Vibrationsbewegung mit der positiven X Axe bildet, der gleich 0^0, wenn jene mit dieser, dagegen gleich 90^0, wenn erstere mit der positiven Y Axe zusammenfällt. Umgekehrt ist auch einleuchtend, dass,

wenn φ bekannt ist, die letzten beiden Gleichungen unsere ursprünglich gedachte Vibrationsbewegung bestimmen.

Bestände neben dem letzten Systeme zweier Gleichungen noch ein zweites, wäre also, um dies durch Indices anzudeuten,

$$x_1 = A_1 \sin 2m_1\pi (t+\vartheta_1) \cdot \cos\varphi_1$$
$$y_1 = A_1 \sin 2m_1\pi (t+\vartheta_1) \cdot \sin\varphi_1$$

und

$$x_2 = A_2 \cdot \sin 2m_2\pi (t+\vartheta_2) \cdot \cos\varphi_2$$
$$y_2 = A_2 \cdot \sin 2m_2\pi (t+\vartheta_2) \cdot \sin\varphi_2 ,$$

so würde das erstere eine erste, das letztere eine zweite geradlinige Vibrationsbewegung bezeichnen, und wäre ein Punkt genöthigt, beiden Bewegungen gleichzeitig Folge zu leisten, so beständen für diese gleichzeitige Bewegung die Gleichungen

$$x = x_1 + x_2$$
$$y = y_1 + y_2 ,$$

d. h. mit andern Worten: die resultirende Bewegung, welche ein Punkt einschlägt, der zweien beliebig gegen einander geneigten geradlinigen Vibrationsbewegungen gleichzeitig folgt, wird dargestellt durch die beiden Gleichungen:

$$x = A_1 \sin 2m_1\pi (t+\vartheta_1) \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \sin 2m_2\pi (t+\vartheta_2) \cos\varphi_2$$
$$y = A_1 \sin 2m_1\pi (t+\vartheta_1) \sin\varphi_1 + A_2 \sin 2m_2\pi (t+\vartheta_2) \cdot \sin\varphi_2$$

Würde endlich vorausgesetzt, ein Punkt solle 3, 4 .... p geradlinigen Bewegungen gleichzeitig Folge leisten, so wäre offenbar die resultirende Bewegung darzustellen durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x = {} & A_1 \sin 2m_1\pi (t+\vartheta_1) \cos\varphi_1 + A_2 \sin 2m_1\pi (t+\vartheta_2) \cos\varphi_2 \\ & + A_3 \sin 2m_3\pi (t+\vartheta_3) \cos\varphi_3 + A_4 \sin 2m_4\pi (t+\vartheta_4) \cos\varphi_4 \\ & + \ldots\ldots + \ldots\ldots + A_p \sin 2m_p\pi (t+\vartheta_p) \cos\varphi_p \\ y = {} & A_1 \sin 2m_1\pi (t+\vartheta_1) \sin\varphi_1 + A_2 \sin 2m_2\pi (t+\vartheta_2) \sin\varphi_2 \\ & + A_3 \sin 2m_3\pi (t+\vartheta_3) \sin\varphi_3 + A_4 \sin 2m_4\pi (t+\vartheta_4) \sin\varphi_4 \\ & + \ldots\ldots + \ldots\ldots + A_p \sin 2m_p\pi (t+\vartheta_p) \sin\varphi_p . \end{aligned}\right\} \odot$$

Denn ohne Zweifel erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen eine Gleichung

$$\Phi (x, y) = 0$$

als Gleichung der resultirenden Schwingungscurve, falls wir im Stande sind, die Variabele t zu eliminiren.

3. Stellen die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x_\mu = A \,.\, \sin 2m\pi\,(t+\vartheta)\,.\,\cos\varphi \\ y_\mu = A\,.\,\sin 2m\pi\,(t+\vartheta)\,.\,\sin\varphi \end{array}\right\}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu = B\,.\,\sin 2n\pi\,(t+\delta)\,.\,\cos\chi \\ y_\nu = B\,.\,\sin 2n\pi\,(t+\delta)\,.\,\sin\chi \end{array}\right\}$$

zwei geradlinige Vibrationsbewegungen vor, und setzen wir voraus, es wäre

$$m = n,$$

so wird die resultirende Bewegung auch dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = P\,.\,\sin\lambda + Q\,.\,\cos\lambda$$
$$y = P_{,}\,.\,\sin\lambda + Q_{,}\,.\,\cos\lambda,$$

wenn wir nämlich $2m\pi t$ mit λ und die constanten Factoren an $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$ im ersten und zweiten der obigen Systeme beziehungsweise mit P, Q und $P_{,}$, $Q_{,}$ bezeichnen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber:

$$\frac{x - P\,.\,\sin\lambda}{Q} = \frac{y - P_{,}\,.\,\sin\lambda}{Q_{,}},$$

d. h.

$$\sin\lambda = \frac{xQ_{,} - yQ}{PQ_{,} - P_{,}Q},$$

ferner:

$$\frac{x - Q\,.\,\cos\lambda}{P} = \frac{y - Q_{,}\,.\,\cos\lambda}{P_{,}},$$

d. h.

$$\cos\lambda = \frac{xP_{,} - yP}{QP_{,} - PQ_{,}}.$$

Erheben wir diese für $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$ gefundenen Ausdrücke ins Quadrat und addiren sie, so folgt, wenn alles geordnet wird:

$$x^2\,.\,(P_{,}^2 + Q_{,}^2) + y^2(Q^2 + P^2) - 2xy(QQ_{,} + PP_{,}) - (PQ_{,} - P_{,}Q)^2 = 0$$

als Gleichung der resultirenden Schwingungscurve bezogen auf unser rechtwinkliges Coordinatenkreuz. Es ist aber das Quadrat des Coëfficienten an xy weniger dem vierfachen Produkte der Coëfficienten an x^2 und y^2 gleich:

$$4\,.\,(QQ_{,} + PP_{,})^2 - 4\,.\,(P_{,}^2 + Q_{,}^2)(P^2 + Q^2)$$

gleich:

$$8\,.\,QQ_{,}\,.\,PP_{,} - 4\,.\,(P^2Q_{,}^2 + Q^2P_{,}^2)$$

gleich:

$$-4\,.\,(PQ_{,} - P_{,}Q)^2,$$

und dieses negative Vorzeichen deutet an, dass die obige Gleichung zwischen x und y einer Ellipse angehört, d. h. also:

»zwei beliebige geradlinige Vibrationsbewegungen, deren »Schwingungszahlen aber gleich sind, liefern bei ihrem »Zusammenwirken unter allen Umständen eine Ellipse »(Kreis, Gerade).«

Daraus folgt aber auch, dass, wenn wir in obigem Systeme ⊙ von zwei Gleichungen p als gerad annehmen und die Schwingungszahlen paarweise gleich setzen etwa

$$m_1 = m_2 = m;\; m_3 = m_4 = n;\; \text{etc.}$$

dieses System von Gleichungen alle möglichen Schwingungscurven darstellt, welche sich in eine Anzahl $\frac{p}{2}$ elliptischer Componenten zerlegen lassen. Es folgt ferner, wenn p ungerad ist, dass wir die Sache so ansehen können, als wären $\frac{p-1}{2}$ elliptische Componenten mit einer geradlinigen verbunden, vorausgesetzt wieder, dass bei $\frac{p-1}{2}$ Paaren der gegebenen geradlinigen Componenten die Schwingungszahlen gleich sind.

4. Ich will hieran noch den Beweis eines andern Satzes knüpfen, der im ersten Theile schon angeführt wurde und vielleicht noch eines schärfern Beweises seiner Richtigkeit bedarf. Nehmen wir nämlich an, es wären zwei elliptische Componenten mit gleichen Schwingungszahlen gegeben, deren Gleichungen wir nach dem soeben unter 3. Erörterten schreiben dürfen als:

$$x_1 = P \sin\lambda + Q \cos\lambda$$
$$y_1 = P_1 \sin\lambda + Q_1 \cos\lambda$$

und

$$x_2 = P' \sin\lambda + Q' \cos\lambda$$
$$y_2 = P_1' \sin\lambda + Q_1' \cos\lambda,$$

so geben diese Componenten eine Resultante, deren Gleichungen sind:

$$x = R \sin\lambda + S \cos\lambda$$
$$y = R_1 \sin\lambda + S_1 \cos\lambda,$$

d. h. nach dem Vorigen wiederum eine Ellipse. Da die geradlinige Vibrationsbewegung nur eine Specialität der elliptischen ist, so können wir nunmehr folgenden Satz als bewiesen aussprechen:

»Verbindet man eine beliebige Zahl elliptischer Compo-»nenten mit einander, oder elliptischer mit geradlinigen, »und sind die Schwingungszahlen aller dieser Componen-»ten gleich, so ist die resultirende Curve eine Ellipse »(Kreis, Gerade); und umgekehrt: eine Ellipse, als Schwin-»gungscurve erhalten, deutet stets den Einklang der ein-»zelnen Elemente unter einander an.«

§. 22.

Ableitung der Gleichungen für die Schwingungscurven des ersten Theils.

1. Wir haben im ersten Theile drei Hauptgruppen von Schwingungscurven ins Auge gefasst und stehen jetzt an dem Punkte, aus den allgemeinen Gleichungen ⊙ die jeder Gruppe entsprechende speciellere Gleichung ableiten zu können, besonders mit Rücksicht auf die Voraussetzungen, welche bei der Darstellung der Taf. V bis XI gemacht wurden, um so unmittelbar die Theorie durch die Zeichnung und umgekehrt der Richtigkeit nach prüfen zu können.

Auf der Taf. V bis VII sind zwei geradlinige Vibrationsbewegungen combinirt und wir erhalten aus den Gleichungen ⊙ die speciellen für diese Combinationen, wenn wir zunächst

$$A_3 = A_4 \;\ldots\ldots\; A_p = 0$$

setzen. Wir nahmen aber in den Zeichnungen der genannten drei Tafeln auch an, dass die eine Componente mit der x Axe zusammenfalle. Daraus folgt, dass wir ausserdem noch

$$\varphi_1 = 0$$

setzen müssen. Wir haben uns ferner im §. 5, 1 überzeugt, dass, wenn bei zwei geradlinigen oder elliptischen oder einer geradlinigen und einer elliptischen Componente zwei Phasendifferenzen für die beiden Componenten ursprünglich angenommen werden, wir, ohne die Gestalt und Lage der resultirenden Schwingungscurve zu ändern, die eine Phasendifferenz gleich Null annehmen dürfen, wenn nur statt der andern eine der ursprünglichen Annahme gemäss veränderte Grösse gesetzt wird. Wir dürfen demnach in ⊙ auch noch ϑ_2 gleich Null setzen und lassen wir jetzt an ϑ_1 und φ_2 den Index weg, schreiben wir für m_1 ein m, für m_2 ein n, für A_1 ein A, für A_2

ein B, so werden die Curven der Taf. V dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin 2m\pi (t+\vartheta) + B . \sin 2n\pi t . \cos\varphi . \\ y &= B . \sin 2n\pi t . \sin\varphi . \end{aligned}\right\} \quad \ldots. \text{ I.}$$

Für die Curven der Taf. VI ist

$$\varphi = 90^0,$$

mithin werden sie dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= A . \sin 2m\pi (t+\vartheta) \\ y &= B . \sin 2n\pi t \end{aligned}\right\} \quad \ldots. \text{ I}, a.$$

Für die Curven der Taf. VII ist

$$\varphi = 0^0,$$

mithin ist ihre Gleichung:

$$x = A \sin 2m\pi (t+\vartheta) + B \sin 2n\pi t. \quad \ldots. \text{ I}, b.$$

2. Auf den Taf. VIII und IX (X ist nur eine Modification von VIII) sind Curven gezeichnet, bei denen die eine Componente geradlinig ist und mit der X Axe zusammenfällt, die andere dagegen elliptisch und zwar so, dass die eine Axe der Ellipse ebenfalls mit der X Axe zusammenfällt.

Nach den Principien, die im vorigen §. entwickelt wurden, erhalten wir die allgemeinen Gleichungen von Curven mit einer geradlinigen und einer elliptischen Componente, wenn wir zunächst

$$A_4 = A_5 = \ldots. A_p = 0$$

und ferner:

$$m_1 = m$$
$$m_2 = m_3 = n$$

setzen, mithin als:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin 2m\pi (t+\vartheta_1) \cos\varphi_1 + A_2 \sin 2n\pi (t+\vartheta_2) \cos\varphi_2 \\ &\quad + A_3 . \sin 2n\pi (t+\vartheta_3) \cos\varphi_3 \\ y &= A_1 \sin 2m\pi (t+\vartheta_1) \sin\varphi_1 + A_2 \sin 2n\pi (t+\vartheta_2) \sin\varphi_2 \\ &\quad + A_3 \sin 2n\pi (t+\vartheta_3) \sin\varphi_3 . \end{aligned}$$

Aber den Tafeln gemäss soll die eine Axe der Ellipse mit der X, die andere mit der Y und ausserdem die geradlinige Componente mit der X Axe zusammenfallen, welchen Anforderungen entsprochen wird, wenn wir weiterhin

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \text{ und } \varphi_3 = 90^0$$

setzen. Unsere Gleichungen werden dann

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin 2m\pi (t+\vartheta_1) + A_2 \sin 2n\pi (t+\vartheta_2) \\ y &= A_3 \sin 2n\pi (t+\vartheta_3) . \end{aligned}$$

Die beiden Componenten, welche die Ellipse erzeugen, sind ohne Zweifel:

$$A_2 . \sin 2n\pi\,(t + \vartheta_2) \text{ und } A_3 \sin 2n\pi\,(t + \vartheta_3);$$

sollen diese Componenten eine Ellipse erzeugen, deren Axen den Zeichnungen gemäss mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, so muss noch $\vartheta_3 = 0$ und $\vartheta_2 = \frac{4\varkappa + 1}{4n}$ gesetzt werden, worin $\varkappa$ eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Schreiben wir ferner für

$$\vartheta_1 \text{ ein } \vartheta$$
$$A_1 \text{ ein } A$$
$$A_2 \text{ ein } B \text{ und } A_3 \text{ ein } C,$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} x = A . \sin 2m\pi\,(t + \vartheta) + B . \cos 2n\pi t \\ y = C . \sin 2n\pi t \end{array}\right\} \quad \ldots . \text{II}$$

als die Gleichungen, für die Curven der Taf. VIII bis X.

3. Auf Taf. XI sind Schwingungscurven gezeichnet, deren beide Componenten elliptisch sind und zwar so, dass die Axen der Ellipsen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Um überhaupt aus den Gleichungen ⊙ die speciellen Gleichungen für beliebig gelegene elliptische Componenten und deren Resultante abzuleiten, haben wir nach dem vorigen §. nur nöthig

$$m_1 = m_2 = m$$
$$m_3 = m_4 = n$$

zu setzen, und sollen die Ellipsen noch so beschaffen sein, dass ihre Axen mit den X und Y zusammen fallen, so haben wir weiter nur nöthig, nach dem, was eben unter 2. erläutert wurde:

$$\varphi_1 = 0; \;\; \varphi_2 = 90^0$$
$$\varphi_3 = 0; \;\; \varphi_4 = 90,$$

ferner:

$$\vartheta_1 = \frac{4\varkappa + 1}{4m}; \;\; \vartheta_2 = 0$$
$$\vartheta_3 = \frac{4\varkappa + 1}{4n}; \;\; \vartheta_4 = 0$$

zu setzen, für A_1, A_2 ein A und B für A_3 und A_4 ein C und D zu schreiben, um folgende Gleichungen:

$$x = A . \cos 2m\pi t + C . \cos 2n\pi t$$
$$y = B . \sin 2m\pi t + D . \sin 2n\pi t$$

als die gewünschten zu erhalten. Aber diese Gleichungen enthalten zwei elliptische Componenten, zwischen denen keine Phasendifferenz besteht; wollen wir dies vermeiden, so haben wir nur nöthig, diese der einen Componente noch hinzuzufügen, wodurch

$$\left.\begin{aligned} x &= A \cdot \cos 2m\pi t + C \cdot \cos 2n\pi\,(t+\vartheta) \\ y &= B \cdot \sin 2m\pi t + D \cdot \sin 2n\pi\,(t+\vartheta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{III}$$

wird.

Bemerkt wird nur noch, dass in den Gleichungen I, I_a und I_b m grösser als n; in der Gleichung II für die Taf. VIII und X $m > n$, für die Taf. IX dagegen $n > m$; in den Gleichungen III ebenso $n > m$ vorausgesetzt wird.

§. 23.

Lagen und Formverhältnisse der Curven in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatenkreuz.

1. Ein Blick auf unsere Curventafeln lehrt, dass für verschiedene Werthe von ϑ dieselbe Gestalt der Curve wiederkehrt, dass ferner die Regelmässigkeit der Form für verschiedene Werthe von ϑ auch eine verschiedene ist. Um diese Verhältnisse aus den oben aufgestellten Gleichungen näher kennen zu lernen, ist es wünschenswerth, hier schon gewisse Definitionen zu geben. Denken wir nämlich irgend eine Curve U Fig. 56, Taf. IV und ein rechtwinkliges Coordinatenkreuz mit dem Mittelpunkte o, so sind es vier bemerkenswerthe Lagen, in welchen wir mit Rücksicht auf die urbildliche Lage und aufs Coordinatenkreuz die Curve zeichnen können, nämlich wie U_1, U_2, U_3, U_4. Die Lage U_1 ist identisch mit U, es ist die ebenbildliche, und ich nenne sie im Folgenden kurz die erste Lage. In der Lage U_2 erscheint das Urbild um die X Axe (parallel der Schrift laufend) herum gedreht; die Lage ist die gegenbildliche bezüglich der X Axe und möge kurz die zweite Lage heissen. In der Lage U_3 erscheint das Urbild um die Y Axe gedreht; die Lage ist die gegenbildliche bezüglich der Y Axe und werde kurz als dritte Lage bezeichnet. In der Lage U_4 erscheint das Urbild um 180^0 um den Coordinatenmittelpunkt gedreht; wir können diese Lage als invers ebenbildliche und der Kürze halber als vierte Lage bezeichnen.

2. In einer dieser vier Lagen treffen wir, ausgehend von einem bestimmten Werthe von ϑ, die Curven wieder an und wir wollen hier noch die analytischen Merkmale dieser Lagen kennzeichnen. Bedeuten

$$(x) \text{ und } (y)$$

die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve, wobei die Klammern anzeigen sollen, dass x und y sowohl positiv als negativ sein können, so gehören demselben Punkte der Curve bei den verschiedenen Lagen folgende Coordinaten an:

Coordinaten der urbildlichen Lage	(x), (y)
Coordinaten der 1ten Lage	$+(x)$, $+(y)$
,, ,, 2ten ,,	$+(x)$, $-(y)$
,, ,, 3ten ,,	$-(x)$, $+(y)$
,, ,, 4ten ,,	$-(x)$, $-(y)$

Bezeichnen wir mit

$$\varepsilon_1 = \pm 1$$

einen Coefficienten am x, mit

$$\varepsilon_2 = \pm 1$$

einen Coefficienten am y, so findet

die erste Lage statt, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$
,, zweite ,, ,, ,, $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$
,, dritte ,, ,, ,, $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$
,, vierte ,, ,, ,, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$

ist.

3. Es ist ferner einleuchtend, dass, wenn die erste und und zweite Lage identisch, das Urbild symmetrisch zur X Axe gelegen sein muss; dass, wenn die erste und dritte Lage identisch, das Urbild symmetrisch zur Y Axe liegt; dass, wenn die erste und vierte identisch, das Urbild eine Mittelpunkts-curve ist; dass endlich, wenn die erste, zweite und dritte Lage identisch, das Urbild symmetrisch zu beiden Axen liegt.

Achtes Capitel.

Allgemeine Theorie der Schwingungscurven, welche durch zwei geradlinige Componenten erzeugt werden, insofern hierbei allein die Grösse ϑ von Einfluss ist.

---

§. 24.

Zwei Componenten unter einem schiefen Winkel.

1. Die Gleichungen, welche dieser Gruppe angehören, sind nach §. 22, 1:

$$\left.\begin{array}{l} x = A \,.\, \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) + B \,.\, \sin 2n\pi t \,.\, \cos\varphi \\ y = B \,.\, \sin 2n\pi t \,.\, \sin\varphi \,. \end{array}\right\} \quad \ldots . \text{ I}$$

Wir wollen die Frage stellen, für welchen Werth von ϑ erhalten wir eine Curve, welche sich mit der durch die Gleichungen I dargestellten in einer der vier, nach dem vorigen §. näher bezeichneten, Lagen befindet oder mit andern Worten: welchen Werth, mit Θ bezeichnet, dürfen wir für irgend ein ursprünglich angenommenes ϑ in obige Gleichungen I einsetzen, damit

$$x = \varepsilon_1 x$$

und

$$y = \varepsilon_2 y$$

wird?

Eine Aenderung am x und y tritt offenbar ein, wenn wir t und ϑ ändern, bezeichnen wir das veränderte t mit t_1, so muss unserer Frage gemäss

$$A \,.\, \sin 2m\pi\,(t_{,}+\Theta) + B \,.\, \sin 2n\pi t_{,} \,.\, \cos\varphi =$$
$$= \varepsilon_1 A \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) + \varepsilon_1 B \,.\, \sin 2n\pi t \,.\, \cos\varphi \quad \dots. (1)$$

und:

$$B \,.\, \sin 2n\pi t_{,} \sin .\, \varphi = \varepsilon_2 B \,.\, \sin 2n\pi t \,.\, \sin\varphi \quad \dots. (2)$$

sein.

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$\sin 2n\pi t_{,} = \varepsilon_2 \sin 2n\pi t$$

d. h.

$$2n\pi t_{,} = \lambda\pi + (-1)^{\lambda} \varepsilon_2 2n\pi t$$

wenn λ eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet; folglich:

$$t_{,} = \frac{\lambda}{2n} + (-1)^{\lambda} \varepsilon_2 t.$$

Führen wir diesen Werth von $t_{,}$ in die Gleichung (1) ein, so folgt:

$$A \,.\, \sin 2m\pi\left[\frac{\lambda}{2n} + (-1)^{\lambda} \varepsilon_2 t + \Theta\right] +$$
$$+ B \sin 2n\pi\left[\frac{\lambda}{2n} + (-1)^{\lambda} \varepsilon_2 t\right] \cos\varphi =$$
$$= \varepsilon_1 A \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) + \varepsilon_1 B \,.\, \sin 2n\pi t \,.\, \cos\varphi \quad \dots. (3)$$

Ordnen wir alles nach den Factoren von $\sin 2m\pi t$, $\cos 2m\pi t$, $\sin 2n\pi t$ und $\cos 2n\pi t$, so folgt, mit Rücksicht darauf, dass:

$$\sin 2m\pi\,(-1)^{\lambda} \varepsilon_2 t = (-1)^{\lambda} \varepsilon_2 \sin 2m\pi t$$
$$\cos 2m\pi\,(-1)^{\lambda} \varepsilon_2 t = \cos 2m\pi t,$$
$$\sin 2n\pi \,.\, \frac{\lambda}{2n} = 0$$
$$\cos 2n\pi \frac{\lambda}{2n} = (-1)^{\lambda}, \text{ zuletzt}$$

$$A \left\{(-1)^{\lambda} \varepsilon_2 \,.\, \cos 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n} + \Theta\right) - \varepsilon_1 \cos 2m\pi\vartheta\right\} \sin 2m\pi t +$$
$$+ A \left\{\sin 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n} + \Theta\right) - \varepsilon_1 \sin 2m\pi\vartheta\right\} \cos 2m\pi t +$$
$$+ B \left\{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right\} \cos\varphi \,.\, \sin 2n\pi t = 0. \quad \dots. (4)$$

Soll diese Gleichung aber für jeden Werth von t bestehen, so muss

$$(-1)^{\lambda} \varepsilon_2 \cos 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n} + \Theta\right) = \varepsilon_1 \cos 2m\pi\vartheta \quad \dots. (5)$$

$$\sin 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)=\varepsilon_1 \sin 2m\pi\vartheta \quad \ldots (6)$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1 \quad \ldots. (7)$$

sein.

Aus (7) folgt, dass ε_2 nicht gleich $+1$ sein kann, wenn $\varepsilon_1=-1$ oder umgekehrt, d. h., dass kein einziger Werth von Θ existirt, welcher, anstatt ϑ gesetzt, eine Curve lieferte, die mit der Curve für ϑ sich in der zweiten oder dritten Lage befände, wie sofort ein Blick auf die Taf. V bestätigt. Mit Rücksicht auf die Gleichung (7) werden die Gleichungen (5) und (6) zu:

$$\cos 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)=(-1)^{\lambda}\cos 2m\pi\vartheta \quad \ldots. (8)$$

$$\sin 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)=\varepsilon_1 \sin 2m\pi\vartheta. \quad \ldots. (9)$$

Diese beiden Gleichungen bestehen allgemein, wenn:

$$2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)=(2\mu+\lambda)\pi+(-1)^{\lambda}\varepsilon_1 2m\pi\vartheta$$

(worin μ jede ganze positive und negative Zahl bedeutet), d. h. wenn:

$$\Theta=\frac{(2\mu+\lambda)n-\lambda m}{2m\,.\,n}+(-1)^{\lambda}\varepsilon_1\vartheta. \quad \ldots. (10)$$

Ist nun λ gerad, so folgt für jeden Werth von m und n

$$\Theta=\frac{K}{mn}+\varepsilon_1\vartheta \quad \ldots. (11)$$

wo K jede ganze positive oder negative Zahl vorstellt.

Ist aber λ ungerad, so folgt für den ersten Fall, unter welcher Benennung wir verstehen wollen, dass m und n ungerade Zahlen, dass

$$\Theta=\frac{K}{mn}-\varepsilon_1\vartheta \quad \ldots. (12)$$

für den zweiten (m gerad, n ungerad) und dritten (m ungerad, n gerad) Fall, dass

$$\Theta=\frac{2K+1}{2mn}-\varepsilon_1\vartheta \quad \ldots. (13)$$

sein muss.

2. Mit Rücksicht auf den Werth von ε_1, der bei der ersten Lage $+1$, bei der vierten -1, lassen sich die durch die Gleichungen (11) bis (13) gegebenen Resultate in folgendem Schema zusammen ordnen.

Lage.	1ster Fall.	2ter Fall.	3ter Fall.
	$\Theta =$	$\Theta =$	$\Theta =$
1ste	$\frac{K}{mn} \pm \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$
4te	$\frac{K}{mn} \pm \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$

.... [I]

Wir wollen dieses Schema durch ein Beispiel mit Rücksicht auf Taf. V noch erläutern. Angenommen $n:m=2:3$, also den 3ten Fall, und $\vartheta = \frac{1}{48}$: welches sind die Werthe von Θ, die eine zur Curve für ϑ ebenbildliche oder invers ebenbildliche Curve liefern? Antwort: ersteres tritt ein, wenn

$$\Theta = \frac{K}{6} + \frac{1}{48} \text{ oder}$$

$$\Theta = \frac{2K+1}{12} - \frac{1}{48},$$

d. h. wenn wir uns nur auf positive Werthe beschränken, für

$$\Theta = \frac{1}{48}, \frac{9}{48}, \frac{17}{48} \ldots$$

oder:

$$\Theta = \frac{3}{48}, \frac{11}{48}, \frac{19}{48} \ldots$$

d. h. überhaupt für:

$$\Theta = \frac{1}{48}, \frac{3}{48}, \frac{9}{48}, \frac{11}{48}, \frac{17}{48}, \frac{19}{48} \ldots$$

Letzteres tritt ein, wenn:

$$\Theta = \frac{K}{6} - \frac{1}{48}$$

oder:

$$\Theta = \frac{2K+1}{12} + \frac{1}{48}$$

d. h. für:

$$\Theta = \frac{7}{48}, \frac{15}{48}, \frac{23}{48} \ldots$$

oder:

$$\Theta = \frac{5}{48}, \frac{13}{48}, \frac{21}{48} \ldots$$

d. h. überhaupt für:

$$\Theta = \frac{5}{48}, \frac{7}{48}, \frac{13}{48}, \frac{15}{48}, \frac{21}{48}, \frac{23}{48} \ldots$$

3. Ein Blick auf das Schema [I] lehrt, dass die Werthe von Θ, welche im ersten Falle eine 1ste oder 4te Lage anzeigen, einander gleich sind. Mit andern Worten heisst dieses aber nichts weiter, als dass, für den Fall m und n ungerad, sämmtliche Curven Mittelpunktscurven sind. Für den zweiten und dritten Fall sind die Θ nicht alle einander gleich, sondern nur für bestimmte Werthe von ϑ, welche zu bestimmen sehr leicht ist. Denn entweder muss, wenn wir diese bestimmten Werthe mit $\vartheta_{,}$ bezeichnen,

$$\frac{K_{,}}{mn} + \vartheta_{,} = \frac{K_{,,}}{mn} - \vartheta_{,}$$

oder

$$\frac{2K_{,}+1}{2mn} + \vartheta_{,} = \frac{2K_{,,}+1}{2mn} - \vartheta_{,}$$

sein*), d. h. es muss

$$\vartheta_{,} = \frac{K_{,,}-K_{,}}{2mn} = \frac{L}{2mn}$$

sein, wobei L jede ganze positive oder negative Zahl vorstellt.

Da die zweite oder dritte Lage, wie wir aus der obigen Bedingungsgleichung (7) gesehen haben, überhaupt nicht vorkommt, so kann auch nicht die Rede davon sein, dass die erste Lage gleich der zweiten oder dritten sei, dass mithin Curven für irgend einen Werth von ϑ existiren, welche symmetrisch zu einer der Coordinatenaxen gelegen wären, wie unsere Tafel bestätigt.

4. Eine weitere Frage, deren Lösung an die Gleichungen I geknüpft werden soll, ist: Für welche Werthe von ϑ treten die im ersten Theile als »vereinfacht« bezeichneten Curven

---

*) Da K in jedem Ausdruck für Θ beliebig ist, so müssen wir dies hier auch durch Indices andeuten.

auf? Da diese Curven die einzigen sind, welche Rückkehrpunkte besitzen, so können wir auch fragen: für welche Werthe von ϑ erhalten wir Rückkehrpunkte? Bezeichnen wir die Werthe von t, wo Rückkehrpunkte stattfinden, mit τ und die betreffenden von ϑ mit Δ, so muss offenbar sein:

$$A \,.\, \sin 2m\pi\,(\tau+t+\Delta) + B \sin 2n\pi\,(\tau+t) \,.\, \cos\varphi =$$
$$= A \,.\, \sin 2m\pi\,(\tau-t+\Delta) + B \sin 2n\pi\,(\tau-t) \,.\, \cos\varphi \quad \ldots . \ (14)$$

und:

$$B \,.\, \sin 2n\pi\,(\tau+t) \,.\, \sin\varphi = B \,.\, \sin 2n\pi\,(\tau-t) \,.\, \sin\varphi \quad \ldots . \ (15)$$

Aus (15) folgt:

$$2n\pi\,(\tau+t) = \lambda\pi + (-1)^{\lambda} 2n\pi\,(\tau-t)$$

oder:

$$\tau+t = \frac{\lambda}{2n} + (-1)^{\lambda}(\tau-t)$$

oder:

$$\tau = \frac{\lambda}{2n[1-(-1)^{\lambda}]} - t \,.\, \frac{[1+(-1)^{\lambda}]}{[1-(-1)^{\lambda}]}\,.$$

Der Werth λ gleich einer geraden Zahl ist offenbar nicht zulässig; für λ eine ungerade Zahl genommen, ergiebt sich aber:

$$\tau = \frac{2\varrho+1}{4n}\,,$$

und führen wir diesen Werth in die Gleichung (14) ein, so folgt, wenn wir Alles nach $\sin 2m\pi t$, $\cos 2m\pi t$, $\sin 2n\pi t$ und $\cos 2n\pi t$ ordnen:

$$2A \cos 2m\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4n} + \Delta\right) \sin 2m\pi t +$$
$$+ 2B \,.\, \cos 2n\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4n}\right) \,.\, \sin 2n\pi t \,.\, \cos\varphi = 0 \quad \ldots . \ (16)$$

welche Gleichung nur bestehen kann, wenn

$$\cos 2m\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4n} + \Delta\right) = 0$$

und

$$\cos 2n\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4n}\right) = 0,$$

d. h. wenn:

$$2m\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4n} + \Delta\right) = \frac{2\varkappa+1}{2}\pi$$

oder:

$$\Delta = \frac{2\varkappa+1}{4m} - \frac{2\varrho+1}{4n}$$

oder:

$$\Delta = \frac{(2\varkappa+1)n - (2\varrho+1)m}{4mn}, \quad \ldots. (17)$$

d. h. im ersten Falle:

$$\Delta = \frac{K}{2mn}, \quad \ldots. (18)$$

im zweiten und dritten

$$\Delta = \frac{2K+1}{4mn}. \quad \ldots. (19)$$

Für $m=4$, $n=3$ z. B., für:

$$\Delta = \frac{2K+1}{48},$$

d. h.

$$\Delta = \frac{1}{48}, \frac{3}{48}, \frac{5}{48} \ldots.$$

oder:

$$\Delta = \frac{2}{96}, \frac{6}{96}, \frac{10}{96},$$

wie die Taf. V auch bestätigt.

§. 25.

Zwei Componenten unter einem rechten Winkel.

1. Die Gleichungen für diese Curven sind, wie wir oben gesehen haben:

$$\left.\begin{aligned} x &= A . \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) \\ y &= B . \sin 2n\pi t \end{aligned}\right\} \quad \ldots. \mathrm{I}_a$$

und fragen wir, für welchen Werth Θ die verschiedenen Lagen bei einer Curve, ausgehend von einem bestimmten Werth von ϑ, auftreten, so haben wir offenbar nur nöthig, in der Gleichung (3) des vorigen §.

$$\varphi = 90^0$$

zu setzen, um so fort als weiter hier zu benutzende Bedingungsgleichung zu erhalten:

$$A . \sin 2m\pi \left[\frac{\lambda}{2n} + (-1)^{\lambda} \varepsilon_2 t + \Theta\right] = \varepsilon_1 A . \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) . \quad \ldots. (1)$$

Lösen wir die Klammern auf, wie im vorigen §. bei der Gleichung (3) geschah, so ergiebt sich:

$$A\left\{(-1)^{\lambda}\varepsilon_2\cos 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)-\varepsilon_1\cos 2m\pi\vartheta\right\}\sin 2m\pi t+$$

$$+A.\left\{\sin 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)-\varepsilon_1\sin 2m\pi\vartheta\right\}=0.$$

soll diese Gleichung aber für jeden Werth von t bestehen, so muss sein:

$$(-1)^{\lambda}\varepsilon_2\cos 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)=\varepsilon_1\cos 2m\pi\vartheta \quad \ldots\ldots (2)$$

und

$$\sin 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)=\varepsilon_1\sin 2m\pi\vartheta \quad \ldots\ldots (3)$$

wobei die Gleichung (2) offenbar identisch ist mit folgender:

$$\cos 2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)=(-1)^{\lambda}\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cos 2m\pi\vartheta. \quad \ldots\ldots (4)$$

Denken wir:

$$\varepsilon_1 . \varepsilon_2=(-1)^{\varkappa}$$

gesetzt, wobei, wenn

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2$$

$\varkappa$ eine gerade Zahl, und wenn

$$\varepsilon_1=-\varepsilon_2$$

$\varkappa$ eine ungerade Zahl sein muss, so wird offenbar beiden Gleichungen (3) und (4) genügt, wenn:

$$2m\pi\left(\frac{\lambda}{2n}+\Theta\right)=(2\mu+\lambda+\varkappa)\pi+(-1)^{\lambda+\varkappa}\varepsilon_1\,2m\pi\vartheta$$

d. h., wenn:

$$\Theta=\frac{(2\mu+\lambda+\varkappa)n-\lambda m}{2mn}+(-1)^{\lambda+\varkappa}\varepsilon_1\vartheta. \quad \ldots\ldots (5)$$

Ist λ und $\varkappa$ gerad, so wird, m und n mag beschaffen sein wie es will:

$$\Theta=\frac{K}{mn}+\varepsilon_1\vartheta. \quad \ldots\ldots (6)$$

Ist λ gerad, $\varkappa$ ungerad, so wird:

$$\Theta=\frac{(2\varrho+1)n-2\nu . m}{2mn}-\varepsilon_1\vartheta,$$

d. h. im ersten und zweiten Falle:

$$\Theta=\frac{2K+1}{2mn}-\varepsilon_1\vartheta, \quad \ldots\ldots (7)$$

im dritten Falle dagegen:

$$\Theta=\frac{K}{mn}-\varepsilon_1\vartheta. \quad \ldots\ldots (8)$$

Ist λ ungerad, $\varkappa$ ungerad, so wird:

$$\Theta = \frac{2\varrho n - (2\nu + 1)m}{2mn} + \varepsilon_1 \vartheta,$$

d. h. im ersten und dritten Falle:

$$\Theta = \frac{2K+1}{2mn} + \varepsilon_1 \vartheta, \qquad \ldots . \ (9)$$

im zweiten dagegen:

$$\Theta = \frac{K}{mn} + \varepsilon_1 \vartheta. \qquad \ldots . \ (10)$$

Ist λ ungerad, $\varkappa$ gerad, so wird:

$$\Theta = \frac{(2\varrho+1)n - (2\nu+1)m}{2mn} + \varepsilon_1 \vartheta,$$

d. h. im ersten Falle:

$$\Theta = \frac{K}{mn} - \varepsilon_1 \vartheta, \qquad \ldots . \ (11)$$

im zweiten und dritten:

$$\Theta = \frac{2K+1}{2mn} - \varepsilon_1 \vartheta. \qquad \ldots . \ (12)$$

Achten wir darauf, dass in der ersten und vierten Lage $\varkappa$ gerad, in der zweiten und dritten $\varkappa$ ungerad, ferner in der ersten und zweiten $\varepsilon_1 = +1$, in der dritten und vierten $\varepsilon_1 = -1$, so lassen sich die in den Gleichungen (6) bis (12) gegebenen Resultate in folgendem Schema zusammenstellen:

Lage.	1ster Fall.	2ter Fall.	3ter Fall.
	$\Theta =$	$\Theta =$	$\Theta =$
1ste	$\frac{K}{mn} \pm \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$
2te	$\frac{2K+1}{2mn} \pm \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$
3te	$\frac{2K+1}{2mn} \pm \vartheta.$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$
4te	$\frac{K}{mn} \pm \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$

.... $[I_a]$

2. Vergleichen wir genauer die Werthe von Θ in diesem Schema, so zeigt sich, wenn m und n ungerade Zahlen sind, dass die erste und vierte und folglich auch die zweite und dritte Lage identisch oder dass sämmtliche Curven in diesem Falle Mittelpunktscurven sind. Daraus folgt aber auch, dass, wenn für gewisse Werthe von Θ die erste und zweite oder erste und dritte Lage einerlei, man Curven vor sich hat, die symmetrisch zu beiden Axen liegen. Nennen wir die betreffenden Werthe von ϑ wiederum $\vartheta_{,}$, so folgt, dass in diesem Falle

$$\frac{K_{,}}{mn} \pm \vartheta_{,} = \frac{2K_{,,}+1}{2mn} \mp \vartheta_{,}$$

sein muss, d. h.:

$$\vartheta_{,} = \frac{2L+1}{4mn},$$

also bei der dritten Horizontalreihe unserer Tafel VI für:

$$\vartheta_{,} = \frac{1}{12}, \ \frac{3}{12}, \ \frac{5}{12}$$

oder:

$$\vartheta_{,} = \frac{2}{24}, \ \frac{6}{24}, \ \frac{10}{24}.$$

Für den zweiten Fall zeigt unser Schema die Gleichheit der ersten und zweiten Lage und dem entsprechend die der dritten und vierten an, woraus folgt, dass, wenn m gerad und n ungerad, die Curven sämmtlich symmetrisch zur X Axe liegen. Im dritten Falle dagegen findet diese Symmetrie bezüglich der Y Axe statt. Denn hier ist die erste und dritte und dem entsprechend die zweite und vierte Lage identisch. Um zu sehen, wann im zweiten Falle Symmetrien zu beiden Axen stattfinden, fragen wir nur, für welchen Werth $\vartheta = \vartheta_{,}$ ist auch die erste und dritte Lage identisch? Offenbar wenn:

$$\frac{K_{,}}{mn} + \vartheta_{,} = \frac{K_{,,}}{mn} - \vartheta_{,}$$

oder auch:

$$\frac{2K_{,}+1}{2mn} + \vartheta_{,} = \frac{2K_{,,}+1}{2mn} - \vartheta_{,},$$

d. h. wenn überhaupt

$$\vartheta_{,} = \frac{L}{2mn},$$

in der sechsten Horizontalreihe der Taf. VI also für:

$$\vartheta_{,} = 0, \frac{1}{24}, \frac{2}{24}, \frac{3}{24}$$

oder:

$$\vartheta_{,} = 0, \frac{4}{96}, \frac{8}{96}, \frac{12}{96}.$$

Um zu sehen, wann im dritten Falle eine Curve symmetrisch zu beiden Axen liegt, setzen wir nur die Werthe der ersten und zweiten Lage gleich und erhalten auch in diesem Falle

$$\vartheta_{,} = \frac{L}{2mn}.$$

3. Um schliesslich zu erfahren, für welche Werthe $\vartheta = \varDelta$ vereinfachte Curven auftreten, setzen wir nur in der Gleichung (16) des vorigen §

$$\varphi = 90^{0},$$

wodurch sie zu folgender wird:

$$2A.\cos 2mn\left(\frac{2\varrho+1}{4n} + \varDelta\right).\sin 2m\pi t = 0,$$

welche nur bestehen kann, wenn

$$\cos 2mn\left(\frac{2\varrho+1}{4n} + \varDelta\right) = 0,$$

d. h. im ersten Falle (m und n ungerad) für:

$$\varDelta = \frac{K}{2mn}, \quad \ldots\ldots (13)$$

im zweiten und dritten dagegen für:

$$\varDelta = \frac{2K+1}{4mn} \quad \ldots\ldots (14)$$

ganz so, wie bei den Curven der Tafel V, was auch erwartet werden konnte.

§. 26.

Zwei Componenten unter einem Winkel von 0°.

1. Die Erscheinungen, welche in diesem Falle auftreten, sind auf Taf. VII für sechs verschiedene Verhältnisse von $m:n$ dargestellt und zwar in doppelter Weise. In jedem der Feldchen erblickt man drei verschiedene Curven, eine punktirte, eine gestrichelte und eine stetig ausgezogene; erstere beiden sind die Componenten, letztere die Resultirende. Unter jedem Feldchen ist die resultirende Curve projicirt zu erblicken, mit den mehr hellen Umkehrstellen und den mehr dunkeln Stel-

len, an welchen eben die Geschwindigkeit eines, den beiden Bewegungen folgenden, Punktes schneller und mithin die Beleuchtung weniger intensiv ist. Diese projectivischen Darstellungen entsprechen daher dem eigentlich physikalischen Vorgang, wie er sich bei geeigneter Zusammenstellung zweier Gabeln oder bei den Stäben meines Kaleidophons vollzieht. Bedeutet m die Schwingungszahl bei der gestrichelten, n bei der punktirten Sinuslinie, so ist die Gleichung der resultirenden Curve, wenn wir die verticalen Linien als Axe der t (y) die mit der Schrift parallelen als Axe der x ansehen, wie schon im §. 22, 1 erwiesen:

$$x = A . \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) + B \sin 2n\pi t \qquad \ldots.\ \mathrm{I}_b.$$

Wir fragen, für welche Werthe von ϑ sind die projectivischen Darstellungen in ebenbildlicher oder in gegenbildlicher Lage in Bezug zur t Axe oder, was dasselbe ist, in erster und dritter Lage vorhanden? Denn die zweite Lage ist ohne weiteres als identisch mit der ersten, sowie die vierte mit der dritten zu betrachten. Nennen wir zu dem Ende die in Frage stehenden Werthe von ϑ und t wiederum Θ und $t_,$, so muss, wie wir auch bereits aus Gleichung (1) §. 24 sehen,

$$A . \sin 2m\pi\,(t_, + \Theta) + B \sin 2n\pi t_,$$
$$= \varepsilon_, A \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) + \varepsilon_, B \sin 2n\pi t \qquad \ldots.\ (1)$$

sein. Diese Gleichung besteht aber offenbar, wenn:

$$\sin 2n\pi t_, = \varepsilon_, \sin 2n\pi t \qquad \ldots.\ (2)$$

und gleichzeitig:

$$\sin 2m\pi\,(t_, + \Theta) = \varepsilon_, \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) \qquad \ldots.\ (3)$$

ist, d. h. wenn:

$$2n\pi t_, = \lambda\pi + (-1)^{\lambda} \varepsilon_, 2n\pi t \qquad \ldots.\ (4)$$

und gleichzeitig:

$$2m\pi\,(t_, + \Theta) = \varkappa\pi + (-1)^{\varkappa} \varepsilon_, 2m\pi\,(t+\vartheta). \qquad \ldots.\ (5)$$

Aus (4) folgt:

$$t_, = \frac{\lambda}{2n} + (-1)^{\lambda} \varepsilon_, t$$

aus (5):

$$t_, = \frac{\varkappa}{2m} + (-1)^{\varkappa} \varepsilon_, t + (-1)^{\varkappa} \varepsilon_, \vartheta - \Theta$$

und da diese für $t_,$ gefundenen Werthe gleich sein müssen:

$$\Theta = \frac{\varkappa}{2m} - \frac{\lambda}{2n} - \left[(-1)^{\lambda} - (-1)^{\varkappa}\right] \varepsilon_, t + (-1)^{\varkappa} \varepsilon_, \vartheta.$$

Soll aber diese Gleichung für jeden Werth von t bestehen, so muss

$$\left[(-1)^{\lambda}-(-1)^{\varkappa}\right]=0$$

sein, d. h. es muss, wenn λ eine gerade Zahl ist, auch $\varkappa$ eine gerade, und wenn λ eine ungerade Zahl ist, auch $\varkappa$ eine ungerade sein, d. h. es muss

$$\Theta=\frac{\varkappa n-\lambda m}{2mn}+(-1)^{\varkappa}\varepsilon_{,}\vartheta \qquad \ldots\ (6)$$

sein. Bei der ersten Lage ist

$$\varepsilon_{,}=+1,$$

mithin wenn:

$$\varkappa \text{ und } \lambda \text{ gerad,}$$

unter allen Umständen

$$\Theta=\frac{K}{mn}+\vartheta, \qquad \ldots\ (7)$$

wenn

$$\varkappa \text{ und } \lambda \text{ ungerad}$$

im ersten Falle:

$$\frac{K}{mn}-\vartheta \qquad \ldots\ (8)$$

im zweiten und dritten

$$\frac{2K+1}{2mn}-\vartheta. \qquad \ldots\ (9)$$

In der zweiten Lage ändert sich offenbar nur das Zeichen vor dem ϑ.

Alle diese Resultate zusammengestellt, ergiebt sich folgende schematische Uebersicht:

Lage.	1ter Fall.	2ter Fall.	3ter Fall.	
	$\Theta=$	$\Theta=$	$\Theta=$	
1ste (2te)	$\frac{K}{mn}\pm\vartheta$	$\frac{K}{mn}+\vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn}-\vartheta$	$\frac{K}{mn}+\vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn}-\vartheta$	.... [I_b]
3te (4te)	$\frac{K}{mn}\pm\vartheta$	$\frac{K}{mn}-\vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn}+\vartheta$	$\frac{K}{mn}-\vartheta$ $\frac{2K+1}{2mn}+\vartheta$	

2. Diese Zusammenstellung zeigt, dass die erste und dritte Lage im ersten Falle identisch, d. h. dass die projectivischen

Darstellungen beiderseits symmetrisch um einen Mittelpunkt liegen. Im zweiten und dritten Falle ist dies nur für bestimmte Werthe von ϑ, nämlich wenn:

$$\frac{K_,}{mn} - \vartheta_, = \frac{K_{,,}}{mn} + \vartheta_,$$

d. h.

$$\vartheta_, = \frac{L}{2mn}$$

und:

$$\frac{2K_, + 1}{2mn} - \vartheta_, = \frac{2K_{,,} + 1}{2mn} + \vartheta_,$$

d. h. auch

$$\vartheta_, = \frac{L}{2mn}$$

ist. Für $m=4$ und $n=3$ z. B. folgt:

$$\vartheta_, = 0, \frac{1}{24}, \frac{2}{24}, \frac{3}{24}$$

oder:

$$\vartheta_, = 0, \frac{4}{96}, \frac{8}{96}, \frac{12}{96}.$$

Es ist im ersten Theile §. 4, 5 darauf aufmerksam gemacht worden, dass die projectivischen Darstellungen, wie sie auf Taf. VII unter jedem Felde erblickt werden, auch entworfen werden könnten, dadurch dass man die Curven der Tafel V auf die X Axe projicirte, mit Rücksicht auf die Erscheinungen, wie sie sich an den Umkehrstellen zeigen. Es ist desshalb einleuchtend, dass wir unser Schema [I_b] auch unmittelbar aus dem Schema [I] ableiten könnten, wenn wir nur recht auf die Form der Curven der Taf. V achten. In der That besteht der Unterschied zwischen den beiden Schemata nur in der Bezeichnung der Lage, indem wir im Schema [I_b] die vierte Lage auch als dritte ansehen können oder die zweite als erste, was bei den Curven der Taf. V nicht der Fall war.

Neuntes Capitel.

Allgemeine Theorie der Schwingungscurven, welche durch eine geradlinige und eine elliptische oder auch zwei elliptische Componenten erzeugt werden.

---

§. 27.

Eine geradlinige und eine elliptische Bewegung in ihrer Combination.

1. Die Gleichungen dieser hierher gehörenden Curven, also der Curven auf Taf. VIII bis X, sind nach §. 22, 2

$$\left.\begin{array}{l} x = A \,.\, \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) + B \,.\, \cos 2n\pi t \\ y = C \,.\, \sin 2n\pi t \,. \end{array}\right\} \quad \ldots . \text{ II.}$$

Bezeichnen wir wiederum mit $t_{,}$ und Θ die betreffenden Werthe, für welche ein $\varepsilon_{,}x$ mit $\varepsilon_2 y$ zusammentrifft, so folgt:

$$\begin{array}{l} A \,.\, \sin 2m\pi\,(t_{,}+\Theta) + B \cos 2n\pi t_{,} \\ = \varepsilon_{,} A \,.\, \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) + \varepsilon_{,} B \cos 2n\pi t \end{array} \quad \ldots . \ (1)$$

und

$$\sin 2n\pi t_{,} = \varepsilon_2 \sin 2n\pi t. \quad \ldots . \ (2)$$

Der Gleichung (2) wird genügt, wenn:

$$2n\pi t_{,} = \lambda\pi + (-1)^{\lambda} \varepsilon_2 2n\pi t,$$

d. h.

$$t_{,} = \frac{\lambda}{2n} + (-1)^{\lambda} \varepsilon_2 t. \quad \ldots . \ (3)$$

Führen wir diesen Werth für $t_{,}$ in die Gleichung (1) ein und ordnen wieder wie früher, so folgt:

$$A\left\{(-1)^{\lambda}\varepsilon_2 \cos 2m\pi\left[\frac{\lambda}{2n} + \Theta\right] - \varepsilon_{,} \cos 2m\pi\vartheta\right\} \sin 2m\pi t +$$

$$+ A\left\{\sin 2m\pi\left[\frac{\lambda}{2n} + \Theta\right] - \varepsilon_{,} \sin 2m\pi\vartheta\right\} \cos 2m\pi t +$$

$$+ B\left[(-1)^{\lambda} - \varepsilon_{,}\right] \cos 2n\pi t = 0 \quad \ldots . \ (4)$$

und soll diese Gleichung für jeden Werth von t bestehen, so muss zunächst:

$$(-1)^{\lambda} - \varepsilon_{,} = 0,$$

d. h.

λ gerad sein, wenn $\varepsilon_{,} = +1$
λ ungerad sein, wenn $\varepsilon_{,} = -1$.

Mit Rücksicht hierauf sind die weitern Bedingungen für das Bestehen der Gleichung (4) dass

$$\cos 2m\pi \left[\frac{\lambda}{2n} + \Theta\right] = \varepsilon_2 \cos 2m\pi\vartheta \qquad \ldots. (5)$$

und

$$\sin 2m\pi \left[\frac{\lambda}{2n} + \Theta\right] = \varepsilon_{,} \sin 2m\pi\vartheta. \qquad \ldots. (6)$$

Da wir ε_2 auch durch ein $(-1)^{\varkappa}$ ausdrücken können, so wird offenbar beiden Gleichungen (5) und (6) genügt, wenn

$$2m\pi \left[\frac{\lambda}{2n} + \Theta\right] = \varkappa\pi + (-1)^{\varkappa}\varepsilon_{,} 2m\pi\vartheta$$

d. h. wenn:

$$\Theta = \frac{\varkappa n - \lambda m}{2mn} + (-1)^{\varkappa}\varepsilon_{,}\vartheta. \qquad \ldots. (7)$$

Handelt es sich um die erste Lage, so ist $\varepsilon_{,} = +1$; λ und $\varkappa$ gerad, mithin, m und n mögen beschaffen sein wie sie wollen:

$$\Theta = \frac{K}{mn} + \vartheta. \qquad \ldots. (8)$$

Bei der zweiten Lage ist $\varepsilon_{,} = +1$; λ gerad, $\varkappa$ ungerad, mithin im ersten und zweiten Falle:

$$\Theta = \frac{2K+1}{2mn} - \vartheta \qquad \ldots. (9)$$

und im dritten:

$$\Theta = \frac{K}{mn} - \vartheta. \qquad \ldots. (10)$$

In der dritten Lage ist $\varepsilon_{,} = -1$; λ ungerad, $\varkappa$ gerad, mithin im ersten und dritten Falle:

$$\Theta = \frac{2K+1}{2mn} - \vartheta \qquad \ldots. 11)$$

im zweiten aber:

$$\Theta = \frac{K}{mn} - \vartheta. \qquad \ldots. (12)$$

In der vierten Lage ist $\varepsilon_{,} = -1$; λ und $\varkappa$ ungerad, mithin im ersten Falle:

$$\Theta = \frac{K}{mn} + \vartheta \qquad \dots (13)$$

und im zweiten und dritten:

$$\Theta = \frac{2K+1}{2mn} + \vartheta. \qquad \dots (14)$$

Ordnen wir diese in den Gleichungen (8) bis (14) gelegenen Resultate wieder in ein Schema, so folgt:

Lage.	1ster Fall.	2ter Fall.	3ter Fall.
	$\Theta =$	$\Theta =$	$\Theta =$
1ste	$\frac{K}{mn} + \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$
2te	$\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$	$\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$
3te	$\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$	$\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$
4te	$\frac{K}{mn} + \vartheta$	$\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$	$\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$

....[II]

Prüfen wir dieses Schema. Auf Taf. VIII ist für $m:n = 3:2$ und $\vartheta = \frac{5}{48}$ die erste Lage vorhanden, wenn:

$$\Theta = \frac{K}{6} + \frac{5}{48} \text{ d. h. für:}$$

$$\Theta = -\frac{3}{48}, \quad +\frac{5}{48}, \quad +\frac{13}{48} \dots$$

Die zweite Lage für:

$$\Theta = \frac{K}{6} - \frac{5}{48} \text{ d. h. für:}$$

$$\Theta = -\frac{5}{48}, \quad +\frac{3}{48}, \quad +\frac{11}{48} \dots$$

Die dritte Lage für:

$$\Theta = \frac{2K+1}{12} - \frac{5}{48} \text{ d. h. für:}$$

$$\Theta = -\frac{1}{48}, \; +\frac{7}{48}, \; +\frac{15}{48} \ldots.$$

Die vierte Lage für:

$$\Theta = \frac{2K+1}{12} + \frac{5}{48} \text{ d. h. für:}$$

$$\Theta = +\frac{1}{48}, \; +\frac{9}{48} \ldots.$$

Wollte man in der fünften Horizontalreihe der Taf. IX die Werthe Θ für $\vartheta = \frac{5}{48}$ bestimmen, so ist einleuchtend, dass man aus dem Schema [II] die Zahlen des zweiten Falls zu benutzen hat, denn jetzt ist m gerad und n ungerad.

2. Ein Blick auf unser Schema [II] zeigt, dass unmittelbar die Werthe in zwei verschiedenen Lagen nicht gleich sind, ausgenommen im ersten Falle, wo wiederum die Gleichheit der Werthe in der ersten und vierten und folglich auch der zweiten und dritten anzeigt, dass wir es mit lauter Mittelpunktscurven zu thun haben. Um zu erfragen, ob in diesem Falle Symmetrien zu beiden Axen vorkommen, setzen wir nur:

$$\frac{K_{,}}{mn} + \vartheta_{,} = \frac{2K_{,,}+1}{2mn} - \vartheta_{,},$$

woraus folgt:

$$\vartheta_{,} = \frac{2L+1}{4mn}.$$

Für $m=3$ und $n=1$ auf Taf. VIII, also wenn:

$$\vartheta_{,} = \frac{2}{24}, \; \frac{6}{24}, \; \frac{10}{24} \ldots\ldots$$

Im zweiten und dritten Falle ist die erste und vierte Lage unter keinen Umständen gleich, woraus folgt, dass in diesen Fällen keine einzige Curve existirt, welche einen Mittelpunkt besitzt, mithin auch keine, welche gleichzeitig symmetrisch zu beiden Axen liegt. Eine Symmetrie zur X Axe findet im zweiten Falle statt, wenn

$$\vartheta_{,} = \frac{2L+1}{4mn},$$

im dritten, wenn

$$\vartheta_{,} = \frac{L}{2mn}$$

und umgekehrt, wenn es sich um Symmetrie zur Y Axe handelt, im zweiten Falle für:

$$\vartheta_{,}=\frac{L}{2mn},$$

im dritten für:

$$\vartheta_{,}=\frac{2L+1}{4mn}.$$

2. Wir wollen zusehen, ob bei der Combination einer elliptischen und einer geradlinigen Componente auch vereinfachte Curven vorkommen. Den Bemerkungen unter 4. §. 24 zufolge wäre die Entscheidung hierüber in den Gleichungen

$$\begin{aligned} A.\sin 2m\pi\,(\tau+t+\varDelta)+B\cos 2n\pi\,(\tau+t) \\ =A\sin 2m\pi\,(\tau-t+\varDelta)+B\cos 2n\pi\,(\tau-t) \quad \ldots\ (15) \end{aligned}$$

und

$$\sin 2n\pi\,(\tau+t)=\sin 2n\pi\,(\tau-t) \quad \ldots\ (16)$$

zu suchen. Da letztere identisch mit Gleichung (15) im §. 24 und für

$$\tau=\frac{2\varrho+1}{4n}$$

besteht, so würde aus unserer jetzigen Gleichung (15), nach Einsetzung dieses Werthes und Reduction nach t, folgende zum Vorschein kommen:

$$\left.\begin{aligned} -\,2A\cos 2m\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4n}+\varDelta\right)\sin 2m\pi t \\ -\,2B\sin 2n\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4n}\right)\sin 2n\pi t \end{aligned}\right\}=0, \quad \ldots\ (17)$$

welche offenbar allgemein nur besteht, wenn die beiden Factoren an $\sin 2m\pi t$ und $\sin 2n\pi t$ gleich Null sind. Da aber dies für den an letzterm Ausdruck stehenden Factor unmöglich ist, so folgt, dass die Gleichung überhaupt nicht bestehen kann, dass also unsere gestellte Frage zu verneinen ist. (Für den Fall, dass $n=m=1$ ist, wird noch eine besondere Bemerkung folgen.)

§. 28.

Combination zweier elliptischer Componenten.

1. Die Gleichungen der Curven, bei welchen zwei elliptische Componenten vorausgesetzt werden, sind nach §. 22, 3

$$\left.\begin{aligned} x &= A \cdot \cos 2m\pi t + C \cos 2n\pi (t+\vartheta) \\ y &= B \cdot \sin 2m\pi t + D \sin 2n\pi (t+\vartheta) . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \text{III.}$$

Um wieder zu einem Schema für die Grössen Θ zu gelangen, benutzen wir die Gleichungen:

$$A \cos 2m\pi t_{,} + C \cos 2n\pi (t_{,}+\Theta)$$
$$= \varepsilon_1 A \cos 2m\pi t + \varepsilon_1 C \cos 2n\pi (t+\vartheta) \quad \ldots\ (1)$$

und

$$B . \sin 2m\pi t_{,} + D \sin 2n\pi (t_{,}+\Theta)$$
$$= \varepsilon_2 B \sin 2m\pi t + \varepsilon_2 D \sin 2n\pi (t+\vartheta) . \quad \ldots\ (2)$$

Diese beiden Gleichungen bestehen offenbar, wenn:

$$\cos 2m\pi t_{,} = \varepsilon_1 \cos 2m\pi t \quad \ldots\ (3)$$
$$\cos 2n\pi (t_{,}+\Theta) = \varepsilon_1 \cos 2n\pi (t+\vartheta) \quad \ldots\ (4)$$

ferner:

$$\sin 2m\pi t_{,} = \varepsilon_2 \sin 2m\pi t \quad \ldots\ (5)$$
$$\sin 2n\pi (t_{,}+\Theta) = \varepsilon_2 \sin 2n\pi (t+\vartheta) . \quad \ldots\ (6)$$

Schreiben wir für ε_1 einmal ein $(-1)^{\lambda}$, das anderemal ein $(-1)^{\varkappa}$, so bestehen die Gleichungen (3) und (5), sobald:

$$2m\pi t_{,} = \lambda\pi + (-1)^{\lambda} \varepsilon_2\, 2m\pi t , \quad \ldots\ (7)$$

die Gleichungen (4) und (6), sobald:

$$2n\pi (t_{,}+\Theta) = \varkappa\pi + (-1)^{\varkappa} \varepsilon_2\, 2n\pi (t+\vartheta) . \quad \ldots\ (8)$$

Aus den beiden letzten folgt aber:

$$\Theta = \frac{\varkappa}{2n} - \frac{\lambda}{2m} + \left[(-1)^{\varkappa} - (-1)^{\lambda}\right] \varepsilon_2 t + (-1)^{\varkappa} \varepsilon_2 \vartheta$$

oder da:

$$(-1)^{\varkappa} - (-1) \quad = 0$$

sein muss:

$$\Theta = \frac{\varkappa m - \lambda n}{2mn} + (-1)^{\varkappa} \varepsilon_2 \vartheta . \quad \ldots\ (9)$$

Bei der ersten Lage ist ε_1 und $\varepsilon_2 = +1$, mithin $\varkappa$ und λ gerad, mithin in allen Fällen:

$$\Theta = \frac{K}{mn} + \vartheta . \quad \ldots\ (10)$$

In der zweiten Lage $\varepsilon_1 = +1$; $\varepsilon_2 = -1$, mithin auch hier $\varkappa$ und λ gerad, mithin in allen Fällen:

$$\Theta = \frac{K}{mn} - \vartheta . \quad \ldots\ (11)$$

In der dritten Lage ist $\varepsilon_1 = -1$, mithin $\varkappa$ und λ ungerad und $\varepsilon_2 = +1$, mithin im ersten Falle:

$$\Theta = \frac{K}{mn} - \vartheta \qquad \ldots. \ (12)$$

und im zweiten und dritten:

$$\Theta = \frac{2K+1}{2mn} - \vartheta. \qquad \ldots. \ (13)$$

In der vierten Lage ist ε_1 und $\varepsilon_2 = -1$, mithin im ersten Falle:

$$\Theta = \frac{K}{mn} + \vartheta, \qquad \ldots. \ (14)$$

im zweiten und dritten:

$$\Theta = \frac{2K+1}{2mn} + \vartheta. \qquad \ldots. \ (15)$$

Diese Resultate in ein Schema geordnet, ergeben:

Lage.	1ster Fall.	2ter Fall.	3ter Fall.
	$\Theta =$	$\Theta =$	$\Theta =$
1ste	$\frac{K}{mn} + \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$	$\frac{K}{mn} + \vartheta$
2te	$\frac{K}{mn} - \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$	$\frac{K}{mn} - \vartheta$
3te	$\frac{K}{mn} - \vartheta$	$\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$	$\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$
4te	$\frac{K}{mn} + \vartheta$	$\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$	$\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta$

....[III]

2. Ein Vergleich der verschiedenen Werthe von Θ lehrt, dass wir es im ersten Falle mit lauter Mittelpunktscurven zu thun haben, dass dagegen im zweiten und dritten Falle keine einzige existirt. Um zu erfahren, wenn im ersten Falle eine Symmetrie zur X Axe und mithin (weil die zweite und dritte Lage identisch ist) auch zu gleicher Zeit zur Y Axe eintritt, setzen wir:

$$\frac{K_1}{mn} + \vartheta_1 = \frac{K_2}{mn} - \vartheta_1,$$

woraus folgt:

$$\vartheta_{,}=\frac{L}{2mn}.$$

Die Werthe in dem zweiten und dritten Falle sind für jede Lage dieselben. Wir erhalten eine Symmetrie zur X Axe für:

$$\vartheta_{,}=\frac{L}{2mn}$$

und zur Y Axe für:

$$\vartheta_{,}=\frac{2L+1}{4mn},$$

für $m=3$ und $n=4$ Taf. XI z. B. für:

$$\vartheta_{,}=\frac{1}{48},\ \frac{3}{48},\ \frac{5}{48}\ldots.$$

oder:

$$\vartheta_{,}=\frac{2}{96},\ \frac{6}{96},\ \frac{10}{96}\ldots.$$

3. Noch bleibt zu entscheiden übrig, ob bei zwei elliptischen Componenten vereinfachte Curven entstehen können. Setzen wir zu dem Ende:

$$A\,.\cos 2m\pi(\tau+t)+C\cos 2n\pi(\tau+t+\varDelta)$$
$$=A\,.\cos 2m\pi(\tau-t)+C\cos 2n\pi(\tau-t+\varDelta) \qquad \ldots.\ (16)$$

und

$$B\,.\sin 2m\pi(\tau+t)+D\sin 2n\pi(\tau+t+\varDelta)$$
$$=B\,.\sin 2m\pi(\tau-t)+D\sin 2n\pi(\tau-t+\varDelta), \qquad \ldots.\ (17)$$

so bestehen diese Gleichungen, wenn:

$$\cos 2m\pi(\tau+t)=\cos 2m\pi(\tau-t)$$
$$\cos 2n\pi(\tau+t+\varDelta)=\cos 2n\pi(\tau-t+\varDelta)$$
$$\sin 2m\pi(\tau+t)=\sin 2m\pi(\tau-t)$$
$$\sin 2n\pi(\tau+t+\varDelta)=\sin 2n\pi(\tau-t+\varDelta)\,.$$

Die dritte von den vier letzten Gleichungen besteht, wie wir schon bei Gleichung (15) §. 24 gesehen, wenn:

$$\tau=\frac{2\varrho+1}{4m},$$

welcher Werth, in die übrigen Gleichungen eingeführt, sie als richtig bestehend zeigen müsste. Die Einführung in die erste der vier letzten Gleichungen liefert aber ein negatives Resultat und wir dürfen desshalb schliessen, dass auch bei zweien elliptischen Componenten keine vereinfachten Curven auftreten, jedoch wird der folgende §. hierzu noch einen Zusatz enthalten.

§. 29.

Bemerkungen zu dem vorstehenden Capitel.

1. Es dürfte nicht überflüssig sein, über die Methoden, welche im Vorhergehenden angewandt wurden, um zur Aufklärung über die allgemeinen Formverhältnisse zu gelangen, hier eine kurze Betrachtung anzustellen.

Es wird dem Leser nicht entgangen sein, dass ich bei den Fundamentalgleichungen I, I_a, I_b, II und III zwei verschiedene Wege eingeschlagen habe, um eben die Grösse Θ zu finden. Die Gleichung für y in den allgemeinen Gleichungen I, I_a, II gestatteten für die Variabele t eine andere $t_,$ zu denken, diese in eine Beziehung mit t zu bringen, in die Gleichung für x einzusetzen und bei der Reduction nach t die Methode der unbestimmten Coëfficienten anzuwenden; ein Weg, der als vollkommen streng angesehen werden muss.

Bei den Gleichungen I_b und III aber war es der Natur der Gleichung für y gemäss nicht möglich, die Grösse $t_,$ unmittelbar in eine Beziehung zu t zu bringen, um sie dann in die Gleichung für x einführen zu können. Ich habe statt dessen bei der Gleichung I_b die Grösse $t_,$ eingeführt, die Gleichung (1) aufgestellt und nun einzelne Theile dieser Gleichung einander gleich gesetzt, so dass wir zwei Gleichungen (2) und (3) erhielten woraus $t_,$ und später eine Gleichung, woraus mit Anwendung des Satzes von den unbestimmten Coëfficienten t entfernt werden konnte, um so schliesslich zu Θ zu gelangen. Auch dieser Weg wird bei näherer Betrachtung als vollkommen richtig bezeichnet werden müssen, und es unterliegt keinem Zweifel, dass wir ihn auch bei den Gleichungen I, I_a und II hätten einschlagen können. Die Gleichungen (1) und (2) §. 24 bestehen z. B. allgemein, wenn:

$$\sin 2m\pi\,(t_,+\Theta) = \varepsilon_1 \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) \quad \ldots.\ (1)$$

$$\sin 2n\pi t_, = \varepsilon_1 \sin 2n\pi t \quad \ldots.\ (2)$$

$$\sin 2n\pi t_, = \varepsilon_2 \sin 2n\pi t \quad \ldots.\ (3)$$

da (2) und (3) sagen ε_1 müsse $= \varepsilon_2$ sein, so berücksichtigen wir nur (1) und (2). Die erstere besteht, wenn:

$$2m\pi\,(t_,+\Theta) = \lambda\pi + (-1)^{\lambda}\varepsilon_1\, 2m\pi\,(t+\vartheta) \quad \ldots.\ (4)$$

die letztere wenn:

$$2n\pi t_{,} = \varkappa\pi + (-1)^{\varkappa}\varepsilon_1 2n\pi t. \qquad \ldots. (5)$$

Berechnet man aus (4) und (5) das $t_{,}$, und setzt die Werthe einander gleich, so folgt:

$$\Theta = \frac{\lambda}{2m} - \frac{\varkappa}{2n} + \varepsilon_1\left[(-1)^{\lambda} - (-1)^{\varkappa}\right]t + (-1)^{\lambda}\varepsilon_1\vartheta$$

und soll diese Gleichung für jeden Werth von t bestehen, so muss λ und $\varkappa$ entweder gleichzeitig gerad oder ungerad sein. Unsere Gleichung für Θ heisst somit:

$$\Theta = \frac{\lambda n - \varkappa m}{2mn} + (-1)^{\lambda}\varepsilon_1\vartheta,$$

welche mit Rücksicht auf die soeben gemachte Bemerkung über $\varkappa$ und λ keine andern Werthe Θ liefert, als die Gleichung (10) §. 24.

2. In dem Falle, wo eine geradlinige und eine elliptische Componente zusammenwirkten, haben wir an der Gleichung (17) §. 27 gesehen, dass keine vereinfachten Curven auftreten konnten. In einem bestimmten Falle ist dies jedoch möglich, nämlich wenn:

$$A = B$$

und

$$m = n = 1.$$

Denn in diesem Falle verwandelt sich die Gleichung (17) §. 27 in

$$\cos 2\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4} + \Delta\right) = \sin 2\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4}\right)$$

d. h.

$$2\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4} + \Delta\right) = 2\lambda\pi,$$

wenn ϱ gerad und

$$2\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4} + \Delta\right) = (2\lambda+1)\pi,$$

wenn ϱ ungerad, d. h. im einen Falle, wenn:

$$\frac{4\sigma+1}{4} + \Delta = \lambda,$$

im andern:

$$\frac{4\sigma+3}{4} + \Delta = \frac{2\lambda+1}{2},$$

d. h. allgemein für:

$$\Delta = \frac{4\mu-1}{4},$$

wo μ und σ beliebige ganze Zahlen bedeuten. Für:

$$\Delta = -\frac{1}{4}, +\frac{3}{4}, +\frac{7}{4} \dots$$

oder

$$\Delta = -\frac{2}{8}, +\frac{6}{8}, +\frac{14}{8} \dots$$

würden demnach auf Taf. VIII bis X vereinfachte Curven entstehen und zwar, wie man leicht den Annahmen

$$A = B$$

gemäss erkennt, verticale mit der YAxe zusammenfallende Geraden, ein Resultat, das wir unmittelbar prüfen können. Denn setzen wir in die Gleichungen

$$x = A \sin 2\pi (t + \vartheta) + A \cos 2\pi t$$
$$y = C \sin 2\pi t$$

für ϑ den Werth

$$\frac{4\mu - 1}{4},$$

so folgt:

$$x = 0$$
$$y = C \sin 2\pi t.$$

Es braucht jedoch nicht

$$A = B$$

zu der Bedingung

$$m = n = 1$$

hinzu zu kommen, sondern letztere genügt schon, um unter Umständen vereinfachte Curven zu liefern. Denn unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung (17) des §. 27 zu:

$$A \cos 2\pi\left(\frac{2\varrho + 1}{4} + \Delta\right) - B \sin 2\pi\left(\frac{2\varrho + 1}{4}\right) = 0,$$

und da

$$\sin 2\pi\left(\frac{2\varrho + 1}{4}\right) = \pm 1 \quad \dots. \ (6)$$

ist, je nachdem ϱ gerad oder ungerad, so wird sie überhaupt bestehen, wenn:

$$\cos 2\pi\left(\frac{2\varrho + 1}{4} + \Delta\right) = \pm \frac{B}{A}. \quad \dots. \ (7)$$

Diese Gleichung deutet aber an, dass sie überhaupt nur bestehen kann, wenn

$$A \overline{\overline{>}} B$$

wie man bei genauerer Ueberlegung der ganzen Verhältnisse auch unmittelbar erkennt. Denn wir haben es in unserem Falle mit dem Einklang zu thun; die Schwingungscurve hierfür ist eine Ellipse, die vereinfachten Schwingungscurven können demnach nur Gerade (oder ein Punkt) sein, und diese müssen nothwendig durch den Mittelpunkt der elliptischen Componente laufen, weil wir im angenommenen Falle zu gleicher Zeit Mittelpunktscurven besitzen, deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenmittelpunkt zusammenfällt. Denken wir die geradlinige Componente $\mu\mu_{,}$ Fig. 25 *b*, Taf. II so auf Fig. 25 *a*, Taf. II gelegt, dass die 0 Punkte und, wie es den Zeichnungen gemäss sein muss, $\mu\mu_{,}$ mit der kleinen Axe (B) der Ellipse zusammenfallen, so kann bei dieser Lage den Anfangspunkt einer vereinfachten Curve von obiger Beschaffenheit nur der Coordinatenmittelpunkt bilden, und liegt dieser nicht gleichzeitig auf $m\mu_{,}$, ist also $m\mu_{,}$ nicht $\overline{\overline{>}}\ B$, so ist jener Anfangspunkt und mithin auch die vereinfachte Curve nicht möglich. Setzen wir Beispiels halber

$$A = 2;\ B = 1,$$

so folgt:

$$\cos 2\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4} + \varDelta\right) = \pm\frac{1}{2},$$

welche Gleichung für das obere Zeichen besteht, wenn:

$$2\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4} + \varDelta\right) = \frac{1}{3}\pi,$$

d. h.

$$\varDelta = \frac{1}{6} - \frac{2\varrho+1}{4},$$

worin aber ϱ nur gerad angenommen werden darf. Für $\varrho = -2$, also wenn:

$$\varDelta = \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{11}{12}.$$

Der Leser, welcher sich die Mühe nehmen will, durch Zeichnung diese Resultate zu prüfen, wird leicht dazu gelangen, falls er nur die Ellipse und die Gerade in 12 Theile theilt statt in 32 und falls er $m\mu$ doppelt so gross macht als die halbe Axe der Ellipse.

Auch dieses allgemeinere Resultat können wir unmittelbar prüfen, wenn wir in den Gleichungen

$$x=A.\sin 2\pi(t+\vartheta)+B\cos 2\pi t$$
$$y=C.\sin 2\pi t,$$

das t eliminiren, wodurch entsteht:

$$x=A.\cos 2\pi\vartheta.\frac{y}{C}+A\sin 2\pi\vartheta\sqrt{1-\frac{y^2}{C^2}}+B\sqrt{1-\frac{y^2}{C^2}}$$

und nun die Gleichung (7) benutzen. Ihr zu Folge ist nämlich:

$$\cos 2\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4}\right)\cos 2\pi\Delta-\sin 2\pi\left(\frac{2\varrho+1}{4}\right)\sin 2\pi\Delta=\pm\frac{B}{A}$$

oder:

$$\sin 2\pi\Delta=\mp\frac{B}{A}$$

und demgemäss:

$$\cos 2\pi\Delta=\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}.$$

Denken wir in diesen letzten Ausdrücken für Δ ein ϑ gesetzt und in die letztere Gleichung für x eingeführt, so folgt mit Rücksicht auf die beiden Vorzeichen der Wurzel:

$$x=A.\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}.\frac{y}{C}\mp B\sqrt{1-\frac{y^2}{C^2}}\pm B\sqrt{1-\frac{y^2}{C^2}}$$

oder:

$$y=\frac{Cx}{\sqrt{A^2-B^2}}, \qquad \text{.... (8)}$$

als Gleichung einer Geraden, welche durch den Coordinatenursprung geht. Zugleich zeigt aber auch die Gleichung (8), dass sie nur reell besteht, so lange

$$A \overline{\overline{>}} B$$

ist.

4. Wir wollen auch die Bedingungen kennen lernen, unter welchen beim Zusammenwirken zweier elliptischen Componenten, die **beide im Einklange** stehen, eine vereinfachte Schwingungscurve, d. h. eine gerade Linie entsteht. Die Bedingungsgleichungen (16) und (17) §. 28 werden jetzt zu:

$$A.\cos 2\pi(\tau+t)+C\cos 2\pi(\tau+t+\Delta)$$
$$=A.\cos 2\pi(\tau-t)+C\cos 2\pi(\tau-t+\Delta) \qquad \text{.... (9)}$$

und

$$B.\sin 2\pi(\tau+t)+D\sin 2\pi(\tau+t+\Delta)$$
$$=B.\sin 2\pi(\tau-t)+D\sin 2\pi(\tau-t+\Delta) \qquad \text{.... (10)}$$

Ordnen wir in beiden Gleichungen nach $\sin 2\pi t$ und $\cos 2\pi t$, so folgt zunächst aus (9)

$$-2A\sin 2\pi\tau - 2C\sin 2\pi(\tau+\varDelta) = 0.$$

oder

$$\frac{\sin 2\pi(\tau+\varDelta)}{\sin 2\pi\tau} = -\frac{A}{C} \qquad \ldots.\ (11)$$

und ebenso aus (10)

$$\frac{\cos 2\pi(\tau+\varDelta)}{\cos 2\pi\tau} = -\frac{B}{D}. \qquad \ldots.\ (12)$$

Lösen wir die Klammern in diesen beiden letzten Gleichungen auf, so folgt auch:

$$\cos 2\pi\varDelta . + \sin 2\pi\varDelta . \operatorname{cotg} 2\pi\tau = -\frac{A}{C}$$

und

$$\cos 2\pi\varDelta - \sin 2\pi\varDelta . \operatorname{tang} 2\pi\tau = -\frac{B}{D},$$

d. h. wenn wir in ersterer die cotg durch tang ausdrücken und aus beiden dann tang $2\pi\tau$ eliminiren:

$$-(\sin 2\pi\varDelta)^2 = \left(-\frac{A}{C} - \cos 2\pi\varDelta\right)\left(-\frac{B}{D} - \cos 2\pi\varDelta\right)$$

oder:

$$-(\sin 2\pi\varDelta)^2 = \frac{A}{C}\cdot\frac{B}{D} + \left(\frac{A}{C} + \frac{B}{D}\right)\cos 2\pi\varDelta + (\cos 2\pi\varDelta)^2$$

oder:

$$-1 - \frac{A}{C}\cdot\frac{B}{D} = \left(\frac{A}{C} + \frac{B}{D}\right)\cos 2\pi\varDelta$$

oder:

$$\cos 2\pi\varDelta = -\frac{AB+CD}{AD+BC} \qquad \ldots.\ (13)$$

als gesuchte Bedingungsgleichung.

Setzen wir z. B. zwei ganz gleiche Ellipsen voraus, also:

$$A = C \text{ und } B = D,$$

so folgt:

$$\cos 2\pi\varDelta = -1,$$

welche Gleichung besteht, wenn:

$$2\pi\varDelta = (2\lambda+1)\pi$$

oder:

$$\varDelta = \frac{2\lambda+1}{2} \qquad \ldots.\ (14)$$

ist. Setzen wir diesen Werth in die für den jetzigen Fall bestehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= A.\{\cos 2\pi t + \cos 2\pi(t+\vartheta)\} \\ y &= B.\{\sin 2\pi t + \sin 2\pi(t+\vartheta)\} \end{aligned} \qquad \ldots.\ (15)$$

für ϑ ein, so folgt:

$$x = 0$$

und

$$y = 0$$

zum Beweis, dass im angenommenen Falle die resultirende Bewegung Null ist, oder dass die vereinfachte Schwingungscurve auf einen Punkt reducirt ist.

5. Es ist durchaus nicht überflüssig, in Betreff der Vorzeichen des t und ϑ hier noch bestimmte Bemerkungen hinzuzufügen. Was zunächst die Grösse ϑ anlangt, so ist einleuchtend, dass wir sie überall als eine positive Grösse ansehen können, da ohne Zweifel eine negative Phasendifferenz stets durch eine gehörig gewählte positive ersetzt werden kann. In unserer bis jetzt gegebenen Theorie darf jedoch unmittelbar ϑ sowohl positiv wie negativ genommen werden. Was negative ϑ und die hiermit zusammenhängenden Θ und Δ anlangt, so ist es leicht, die Curven auf den Tafeln für sie zu finden. Denn es bedarf keiner grossen Ueberlegung, dass, wenn wir die Phasendifferenz 0 statt unter die am weitesten links stehenden Curven, sie unter die am weitesten rechts stehenden setzen und nun die Phasendifferenz von rechts nach links schreiben, diese Werthe als negative Grössen anzusehen sind.

In den Gleichungen für unsere Schwingungscurven lassen sich zwei Bestandtheile unterscheiden, von denen jeder aus einem oder zwei Gliedern besteht. Der eine gehört der einen, der andere der andern Vibrationscomponente an. Jeder dieser Bestandtheile enthält die Grösse t. Wir haben von vorn herein den Sinn der positiven Bewegungsrichtung für beide Componenten festgestellt, wodurch auch der negative sich ergab, und es ist einleuchtend, dass, wenn wir t durch ein $-t$ ersetzen, dies zwar beide Componenten betrifft, aber, wie der Gang unserer Rechnungen lehrt, für die Endresultate von keinem Einflusse sein kann. Anders würde aber die Sache werden, wenn wir in einem Bestandtheile das Zeichen an t änderten, also voraus setzen, die eine Vibrationsrichtung solle sich umkehren. Ohne dass ich diesen Fall, dessen Behandlung aber leicht ist, nach allen Seiten hin erledige, möchte ich ihn nur durch ein Beispiel näher bezeichnen. Wir haben eben am

Schlusse von 4. gesehen, dass, wenn gleiche elliptische Componenten zusammenwirken und

$$\vartheta = \frac{2\lambda+1}{2}$$

angenommen wird, als vereinfachte Schwingungscurve die extreme Form, nämlich ein Punkt, auftritt. Aendern wir aber für die eine Componente, also die Glieder

$$A \cos 2\pi t \text{ und } B \sin 2\pi t$$

das Zeichen von t, wodurch sie zu

$$A \cos 2\pi t \text{ und } -B \sin 2\pi t$$

werden, und setzen in den so veränderten Gleichungen (15)

$$\begin{aligned} x &= A\{\cos 2\pi t + \cos 2\pi (t+\vartheta)\} \\ y &= B\{-\sin 2\pi t + \sin 2\pi (t+\vartheta)\} \end{aligned}$$

an die Stelle von ϑ ein $\frac{2\lambda+1}{2}$, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -2B \sin 2\pi t. \end{aligned}\right\} \quad \ldots. \ (16)$$

Setzen wir bei der andern Ellipse, also bei den Gliedern

$$A \cos 2\pi (t+\vartheta) \text{ und } B \sin 2\pi (t+\vartheta)$$

ein $-t$ statt t, so liefern die obigen Gleichungen (15)

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= +2B \sin 2\pi t. \end{aligned}\right\} \quad \ldots. \ (17)$$

Diese Gleichungen (16) und (17) zeigen eine vereinfachte Schwingungscurve an, aber nicht einen Punkt, sondern eine mit der Y Axe zusammenfallende Gerade, deren Länge $= 2B$ ist und worauf im erstern Falle, der zur Gleichung (16) führte, die Bewegung umgekehrt ist wie im zweiten, welcher die Gleichung (17) nach sich zog.

6. Die letzte Bemerkung, welche ich dem Vorausgehenden hinzufügen muss, betrifft einen in der Lissajous'schen Abhandlung enthaltenen Irrthum. Auf unserer Taf. VI, also der, welche Lissajous seiner Abhandlung beigegeben, habe ich unter die einzelnen Curven zwei Werthe für ϑ gesetzt: die freien sind die meinigen, die eingeklammerten die Lissajous'schen, und es fragt sich, woher diese Unterschiede? Zur Lösung dieser Frage möge zunächst das Endresultat der genannten Arbeit, so weit es eben in Betracht kommt, folgen. Lissajous sagt:

»Ainsi, pour résumer la discussion précédente dont nous allons tirer parti dans la mise en équation de nos courbes:

1°. Quand n (mein m) est pair et n' (mein n), impair, la courbe est symmétrique par rapport à l'axe des x (dieselbe wie bei mir).

2°. Quand n est impair et n' pair, la courbe est symmétrique par rapport à l'axe des y.

3°. Quand n et n' sont impairs, la courbe a un centre qui est l'origine des coordonées.

4°. Si s (mein ϑ) augmente ou diminue de

$$\frac{2K\theta}{2n}, \quad \frac{2K\theta}{2n_{,}}, \quad \frac{2K\theta}{2nn'}$$

la courbe conserve sa forme.

5°. Si s augmente ou diminue de

$$\frac{2K+1}{2n}\,\theta$$

la courbe est remplacée par sa symmétrique par rapport à l'axe des y.

6°. Si s augmente ou diminue de

$$\frac{2K+1}{2n'}\,\theta$$

la courbe est remplacée par sa symmétrique à l'axe des x.

7°. Si s augmente ou diminue de

$$\frac{2K+1}{2nn'}\,\theta$$

il y a trois cas à considérer:

Si n est impair, n' pair, la courbe est remplacée par la symmétrique par rapport à l'axe des x;

Si n est pair, n' impair, la courbe est remplacée par la symmétrique à l'axe des y;

Si n et n' sont impair, la courbe est remplacée par sa symmétrique par rapport à l'un quelconque des axes.

8°. Si l'on change s en $-s$, il y a trois cas à considérer:

Si n est impair, n' pair, la courbe est remplacée par la symmétrique par rapport à l'axe des y.

Si n est pair, n' impair, la courbe est remplacée par la symmétrique par rapport à l'axe des x.

Si n et n' sont impair, la courbe ne change pas.«

Die Grösse θ ist nach LISSAJOUS die Zeit, innerhalb welcher n und gleichzeitig n' Schwingungen sich vollziehen, also das, was ich als Zeiteinheit als 1 angesehen habe; offenbar ist dann s ein Theil dieser Zeit θ, wie die LISSAJOUS'schen Gleichungen auch bestätigen. Prüfen wir obige Resultate in Bezug auf ihre Allgemeinheit und Richtigkeit, indem wir die auf Taf. VI in Klammern gesetzten Phasendifferenzzahlen berücksichtigen.

Angenommen werde erstens:

$$n = 3, \ n' = 1; \ s = \frac{1}{8}$$

und gefragt: wann die symmetrische Curve zur Axe der y auftritt? Nach 5⁰ für

$$\left(\frac{1}{8} \pm \frac{2K+1}{6}\right) \theta$$

ferner nach dem dritten Absatz in 7⁰ ebenfalls für

$$\left(\frac{1}{8} \pm \frac{2K+1}{6}\right) \theta,$$

d. h. wenn wir $K = 0, 1, 2, 3$ .... setzen und nur positive Werthe berechnen für:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right) \theta, \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{6}\right) \theta, \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{6}\right) \theta, \left(\frac{1}{8} + \frac{7}{6}\right) \theta \ldots.$$

d. h. für:

$$\frac{7}{24} \theta, \frac{15}{24} \theta, \frac{23}{24} \theta, \frac{31}{24} \theta \ldots.$$

ein Resultat, das man sich ausser dem Werthe $\frac{15}{24} \theta = \frac{5}{8} \theta$ vergeblich bemüht, als richtig zu erkennen.

Angenommen werde zweitens:

$$n = 3; \ n' = 2; \ s = \frac{3}{16}$$

und gefragt, wann kehrt die zur Axe der x symmetrisch gestaltete Curve wieder? Nach 6⁰ für:

$$\left(\frac{3}{16} \pm \frac{2K+1}{4}\right) \theta$$

ferner nach dem ersten Absatz in 7⁰ für:

$$\left(\frac{3}{16} \pm \frac{2K+1}{12}\right) \theta.$$

Der erstere Ausdruck liefert die Werthe

$$\frac{7}{16}\theta, \frac{15}{16}\theta, \frac{23}{16}\theta \ldots.$$

der zweite

$$\frac{13}{48}\theta, \frac{21}{48}\theta, \frac{29}{48}\theta \ldots.,$$

welche ersteren Werthe als richtig, letztere mit Ausnahme von $\frac{21}{48}\theta$ als falsch erkannt werden müssen.

Wir wollen uns bei diesen beiden Beispielen begnügen und zusehen, wo die Fehler liegen. Lissajous hat einfach darin gefehlt, dass er in der Rechnung die Grösse s als einen Theil der Zeit θ, auf den Tafeln aber als einen Theil einer horizontalen Schwingung oder der Zeit $\frac{\theta}{n}$ ansieht. Er hat also nach meinen Annahmen und Bezeichnungen §. 4, 1 die Zeiteinheit und die Zeit $\frac{1}{m}$ für identisch gehalten. Unsern Bemerkungen in §. 4, 1 zu Folge müssten die Lissajous'schen Zahlen unter den Curven erhalten werden, wenn wir im ersten Beispiele $s = \frac{1}{8}$ lassen aber statt

$$\frac{2K+1}{6} \text{ ein } 3.\frac{2K+1}{6.},$$

und im zweiten Beispiele $s = \frac{3}{16}$ lassen und statt $\frac{2K+1}{4}$ und $\frac{2K+1}{12}$ ein $3.\frac{2K+1}{4}$ und $3.\frac{2K+1}{12}$ setzen. Wir wollen dies bei dem ersten Beispiele thun. Der Ausdruck

$$\left(\frac{1}{8} \pm \frac{2K+1}{2}\right)\theta$$

liefert dann die Werthe:

$$\frac{5}{8}\theta, \frac{13}{8}\theta, \frac{21}{8}\theta \ldots.,$$

ein Resultat, welches zwar keine falschen Zahlen angiebt, aber z. B. nicht den Werth $\frac{3}{8}$ enthält, für welchen ebenfalls die Curve symmetrisch zur YAxe liegt. Die Lissajous'sche Theorie müsste ferner meine Phasendifferenzzahlen liefern, wenn man im ersten Beispiele anstatt $s = \frac{1}{8}$ ein $s = \frac{1}{24}$ setzte und die Werthe des Ausdrucks

$$\frac{1}{24} \pm \frac{2K+1}{6}$$

ausrechnete. Sie sind:

$$\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{21}{24} \ldots,$$

welche Zahlen zwar symmetrisch zur y Axe gelegene Curven anzeigen, aber ebenfalls nicht alle.

Vergleicht man aber den Ausdruck

$$s \pm \frac{2K+1}{6}$$

mit den, unserer Frage gemäss durch das Schema [I], angegebenen, Werthen, so ist er identisch mit

$$\frac{2K+1}{2mn} + \vartheta;$$

meiner Theorie nach treten die verlangten Curven aber auch auf für

$$\frac{2K+1}{2mn} - \vartheta$$

d. h. für

$$\frac{2K+1}{6} - \frac{1}{24}$$

d. h. für

$$\frac{3}{24}, \frac{11}{24}, \frac{19}{24} \ldots$$

auf, und stellen wir sie mit den obigen zusammen, so erhalten wir die Zahlenreihe:

$$\frac{3}{24}, \frac{5}{24}, \frac{11}{24}, \frac{13}{24}, \frac{19}{24}, \frac{21}{24} \ldots,$$

welche Reihe nunmehr aber vollständig befriedigt.

Diese wenigen Bemerkungen dürften hinreichen, um sich zu überzeugen, dass es den oben angeführten Lissajous'schen Resultaten in genannter Beziehung an Allgemeinheit und Richtigkeit gebricht.

Zehntes Capitel.

Besondere Eigenschaften der Schwingungscurven.

§. 30.

Die Maxima und Minima.

1. Die Curven der Taf. V werden in Bezug auf y einen Maximalwerth erhalten, wenn (siehe Gleichung I)

$$\sin 2n\pi t = +1\,,$$

einen Minimalwerth, sobald

$$\sin 2n\pi t = -1$$

ist. Ersteres tritt aber ein, wenn:

$$2n\pi t = \frac{4\varkappa+1}{2}\pi$$

d. h.

$$t = \frac{4\varkappa+1}{4n}, \qquad \ldots. \ (1)$$

letzteres wenn:

$$t = \frac{4\varkappa+3}{4n}. \qquad \ldots. \ (2)$$

Betrachten wir t immer als positiv, wodurch (jedoch mit Rücksicht auf die Bemerkungen in §. 29, 5) der Allgemeinheit kein Eintrag geschieht, so findet das erste Maximum für

$$\varkappa = 0$$

d. h.

$$t = \frac{1}{4n}$$

statt. Beachten wir ferner, dass die Curve vollendet ist, wenn

$$t = 1 + \frac{1}{4n}$$

geworden, d. h. x alle Werthe von 0 bis n durchlaufen hat, so folgt, dass das y überhaupt n Maxima und wie leicht erkennbar auch n Minima bekommt.

Da hierbei die Grösse ϑ gar nicht in Betracht kam, so wird die Zahl der n Maxima und Minima für alle ϑ dieselbe sein. Man muss jedoch wohl dabei beachten, dass hier nur Maxima und Minima mit Rücksicht auf die Zeit verstanden werden, dass aber wohl zwei zeitlich verschiedene Maxima oder Minima räumlich zu einem werden können. Was die absolute Grösse der Maxima und Minima anlangt, so erkennt man aus der Gleichung für y, nämlich:

$$y = B \,.\, \sin 2n\pi t \,.\, \sin\varphi,$$

dass sie alle gleich

$$B \,.\, \sin\varphi;$$

d. h. mit andern Worten, eine gerade Linie im Abstand $+B\sin\varphi$ und $-B\sin\varphi$ mit der X Axe parallel gelegt, berührt die Curven beziehungsweise in n Maximal- und n Minimalstellen.

Die Maxima oder Minima für x würden offenbar gefunden, wenn man den Differentialquotient $\frac{dx}{dt} = 0$, d. h.

$$2m\pi A \,.\, \cos 2m\pi(t+\vartheta) + 2n\pi \cos\varphi B \,.\, \cos 2n\pi t = 0 \quad \ldots. \; (3).$$

setzte und diese Gleichung nach t auflöste. Letztere Gleichung (3) lässt sich auch als

$$\frac{\cos 2m\pi(t+\vartheta)}{\cos 2n\pi t} = -\frac{n}{m} \,.\, \frac{B\cos\varphi}{A}$$

schreiben und man bemerkt, wie die Maxima und Minima nicht nur von m, n und ϑ, sondern auch von A, B und φ abhängen.

Gesetzt es wäre

$$m = 2; \; n = 1 \text{ und } \varphi = 45^0$$

so hiesse die Bedingungsgleichung zur Auffindung der Maxima und Minima:

$$\frac{\cos 2 \,.\, 2 \,.\, \pi(t+\vartheta)}{\cos 2\pi t} = -\frac{1}{2} \,.\, \frac{B\sqrt{\frac{1}{2}}}{A}$$

oder:

$$\frac{2\{\cos 2\pi(t+\vartheta)\}^2 - 1}{\cos 2\pi t} = -\frac{1}{2} \,.\, \frac{B\sqrt{\frac{1}{2}}}{A}$$

oder:

$$4\{\cos 2\pi\vartheta \,.\, \cos 2\pi t - \sin 2\pi\vartheta \,.\, \sin 2\pi t\}^2 - 2$$
$$= -\frac{B\sqrt{\frac{1}{2}}}{A} \,.\, \cos 2\pi t \,.$$

Bezeichnen wir

$$\cos 2\pi t \text{ mit } u$$

folglich:

$$\sin 2\pi t \text{ mit } \sqrt{1-u^2},$$

ferner:

$$\cos 2\pi\vartheta \text{ mit } P$$
$$\sin 2\pi\vartheta \text{ ,, } Q$$
$$\frac{B\sqrt{\frac{1}{2}}}{A} \text{ ,, } R$$

so können wir obige Gleichung etwas anders geordnet auch schreiben:

$$4P^2u^2 + 4Q^2(1-u^2) - 8PQu\sqrt{1-u^2} + Ru - 2 = 0$$

oder auch

$$4(P^2-Q^2)u^2 + Ru + 4Q^2 - 2 = 8PQu\sqrt{1-u^2}$$

oder wenn wir diese Gleichung ins Quadrat erheben und nach Potenzen von u ordnen:

$$\{16(P^2-Q^2)^2 + 64P^2Q^2\}u^4 + 8(P^2-Q^2)Ru^3 +$$
$$+ \{8(P^2-Q^2)(4Q^2-2) - 64P^2Q^2 + R^2\}u^2 +$$
$$+ 2R(4Q^2-2)u + (4Q^2-2)^2 = 0 \qquad \text{.... (4)}$$

d. h. wenn wir einfachere Bezeichnungen einführen:

$$Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E = 0 \,, \qquad \text{.... (5)}$$

worin die Bedeutung der Coëfficienten unmittelbar einleuchtet. Um demnach im gegebenen Falle die Maxima und Minima aufzufinden, hätten wir eine Gleichung vom vierten Gerade aufzulösen. Setzen wir ferner beispielshalber um die Gleichung (4) zu vereinfachen

$$P = Q$$

voraus, d. h.

$$\cos 2\pi\vartheta = \sin 2\pi\vartheta \,,$$

welches eintreten kann für

$$2\pi\vartheta = \frac{\pi}{4}$$

d. h.

$$\vartheta = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \,,$$

so folgt statt der Gleichung (4), wenn man beachtet, dass:

$$P=Q=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$16u^4+(-16+R^2)u^2=0.$$

Diese Gleichung besteht aber einmal für

$$u=\cos 2\pi t=0,$$

d. h. für

$$2\pi t=\frac{2\lambda+1}{2}\pi$$

oder:

$$t=\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\ldots\ldots, \qquad \ldots. (6)$$

von welchen Werthen aber offenbar nur die beiden ersten $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ zu berücksichtigen sind, weil sie innerhalb der Grenze $t=0$ und $t=1$, also innerhalb der Zeit liegen, in der die Curve ganz vollendet ist. Die Gleichung besteht ferner aber auch, wenn:

$$16u^2+(-16+R^2)=0$$

d. h.

$$u=\pm\sqrt{1-\frac{R^2}{16}}. \qquad \ldots. (7)$$

Bilden wir den zweiten Differentialquotienten, so folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-4m^2\pi^2A.\sin 2m\pi(t+\vartheta)-4n^2\pi^2\cos\varphi B\sin 2n\pi t,$$

oder wenn wir für unsern speciellen Fall die betreffenden Werthe für m, n und ϑ einführen:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-16\pi^2A.\cos 2.2\pi t-4\pi^2\sqrt{\frac{1}{2}}B.\sin 2\pi t.$$

Nehmen wir, um noch mehr zu specialisiren, an, es wäre:

$$A=B=1,$$

so würde die Gleichung (7) übergehen in:

$$u=\pm\sqrt{1-\frac{1}{32}}=\pm\sqrt{\frac{31}{32}}. \qquad \ldots. (8)$$

Bilden wir unter der zuletzt gemachten Voraussetzung den zweiten Differentialquotienten, so folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-16\pi^2\cos 2.2\pi t-4\pi^2\sqrt{\frac{1}{2}}.\sin 2\pi t.$$

Nehmen wir aus (6) die Werthe $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ für t und setzen sie in diese letzte Gleichung ein, so folgt einmal:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 16\pi^2 - 4\pi^2\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\pi^2\left(4 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

das anderemal:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 16\pi^2 + 4\pi^2\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\pi^2\left(4 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

mithin tritt für die Werthe $t = \frac{1}{4}$ und $t = \frac{3}{4}$ ein Minimum ein. Nehmen wir aus (8) die beiden Werthe für u und führen sie in die Gleichung für den zweiten Differentialquotienten ein, die auch als

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -16\pi^2(2\cos 2\pi t^2 - 1) - 4\pi^2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1 - \cos 2\pi t^2}$$

geschrieben werden kann, so folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -16\pi^2\left(\frac{31}{16} - 1\right) - 4\pi^2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{32}}$$

$$= -4\pi^2\left(\frac{15}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{32}}\right)$$

$$= -4\pi^2\left(\frac{15}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= -\pi^2\left(15 + \frac{1}{2}\right),$$

d. h. die beiden Werthe $+\sqrt{\frac{31}{32}}$ und $-\sqrt{\frac{31}{32}}$ für u eingeführt, machen das x zu einem Maximum. Also im angenommenen Falle bekommen wir zwei Maxima und zwei Minima. Um noch die absoluten Grössen derselben zu finden, führen wir die Werthe von u aus (6) und (8) unmittelbar in die Gleichung für x, d. h.

$$x = \cos 2.2\pi t + \sqrt{\frac{1}{2}} . \sin 2\pi t$$

ein. Die Minimalwerthe liefern

$$x_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Die Maximalwerthe aber, wenn man vorher

$$x = 2\cos 2\pi t^2 - 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1 - \cos 2\pi t^2}$$

geschrieben denkt, einmal wie das anderemal:

$$x_1 = x_2 = 2 \cdot \frac{31}{32} - 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{32}} = \frac{15}{16} + \frac{1}{8} = \frac{17}{16}.$$

Diese Resultate werden sofort in ihrer Richtigkeit erkannt, wenn man sich für die betreffenden Annahmen die Curve zeichnet. Die Minima für x sind verschieden; die Maxima aber, da man eine vereinfachte Curve erhält, fallen zusammen.

Ueberhaupt aber dürften die bisherigen Betrachtungen hinreichen, um sich von der Richtigkeit des Folgenden zu überzeugen. Wir sahen oben, dass unter der Voraussetzung

$$m = 2$$

eine Gleichung vierten Grades schliesslich zum Vorschein kam, welche, aufgelöst, im Allgemeinen für x vier verschiedene Werthe liefern würde, und zwar voraussichtlich zwei einem Maximum und zwei einem Minimum angehörig. Da m als grössere Schwingungszahl vorausgesetzt wird, so ist einleuchtend, wie im Allgemeinen, wenn man obige Umformung des Werthes für $\frac{dx}{dt}$ vornimmt und alle sinus durch cosinus oder auch umgekehrt ausdrückt, schliesslich eine Gleichung resultirt von der Form:

$$Au^{2m} + Bu^{2m-1} + Cu^{2m-2} + \ldots\ Pu + R = 0, \qquad \ldots\ (9)$$

deren Auflösung zu m Maximal- und m Minimalwerthen führen würde.

Da diese Gleichung schon für $m = 3$ vom sechsten Grade wird, so ist begreiflich, wie die Aufsuchung der betreffenden Werthe eine sehr umständliche werden kann. Es kam hier auch nur darauf an, möglichst die Ueberzeugung zu gewinnen, dass eine Gleichung von der Form

$$x = A \cdot \sin 2m\pi\,(t + \vartheta) + B \cdot \sin 2n\pi t$$

für x im Allgemeinen m Maxima und m Minima liefert.

Weit leichter als die Aufsuchung der Maxima und Minima bei dem x ist die der Maxima-Maximorum und Minima-Minimorum; denn die ersteren werden ohne Zweifel eintreten, wenn:

$$\sin 2m\pi(t+\vartheta) = +1 \quad \ldots. (10)$$

und gleichzeitig

$$\sin 2n\pi t = +1, \quad \ldots. (11)$$

die letzteren, wenn:

$$\sin 2m\pi(t+\vartheta) = -1 \quad \ldots. (12)$$

und gleichzeitig

$$\sin 2n\pi t = -1 \quad \ldots. (13)$$

wird. Ein Maximum-Maximorum findet daher statt, wenn:

$$2m\pi(t+\vartheta) = \frac{4\varkappa+1}{2}\pi$$

und:

$$2n\pi t = \frac{4\lambda+1}{2}\pi,$$

d. h. wenn:

$$\vartheta = \frac{(4\varkappa+1)n-(4\lambda+1)m}{4mn}$$

oder da $4\varkappa n - 4\lambda m = 4K$ gesetzt werden kann, wenn:

$$\vartheta = \frac{K}{mn} + \frac{(n-m)}{4mn} \quad \ldots. (14)$$

d. h. ein Maximum-Maximorum findet nur für einen bestimmten Werth von ϑ statt. Für

$$n=1;\; m=3$$

z. B. für

$$\vartheta = \frac{K}{3} - \frac{1}{6}$$

oder für:

$$\vartheta = -\frac{1}{6},\; +\frac{1}{6},\; \frac{3}{6},\; \frac{5}{6} \ldots.$$

oder:

$$\vartheta = -\frac{4}{24},\; +\frac{4}{24},\; \frac{12}{24},\; \frac{20}{24},$$

wie sofort die Tafel V bestätigt.

Ein Minimum-Minimorum tritt ein, wenn:

$$2m\pi(t+\vartheta) = \frac{4\varkappa+3}{2}\pi$$

$$2n\pi t = \frac{4\lambda+3}{2}\pi$$

d. h.

$$\vartheta = \frac{(4\varkappa+3)n-(4\lambda+3)m}{4m.n}$$

oder:

$$\vartheta = \frac{K}{mn} + \frac{3(n-m)}{4 \, . \, mn} \qquad \text{.... (15)}$$

ist; in obigem Beispiele also für:

$$\vartheta = \frac{K}{3} - \frac{1}{2},$$

d. h. für:

$$\vartheta = -\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{6}, \ +\frac{1}{6}, \ \frac{3}{6}, \ \frac{5}{6} \ldots\ldots$$

oder:

$$\vartheta = -\frac{12}{24}, \ -\frac{4}{24}, \ +\frac{4}{24}, \ \frac{12}{24}, \ \frac{20}{24} \ldots$$

In einem weitern Beispiele, worin

$$m = n = 1$$

für

$$\vartheta = 0, \ 1, \ 2 \ldots\ldots$$

2. Es wurde im ersten Theile öfter bemerkt, dass die Curven auf der Taf. VII in der Richtung der x, m Maxima, und m Minima zeigten. Die Gleichung für diese Curven (die Gleichung I_b) ist

$$x = A \sin 2m\pi\,(t + \vartheta) + B \sin 2n\pi t$$

und es enthält das unmittelbar Vorausgehende ohne Zweifel auch für die Curven und horizontalprojectivischen Darstellungen das, was im Allgemeinen in Betreff der Maxima und Minima zu berücksichtigen ist. Wir haben im Allgemeinen m verschiedene von m, n, A, B und ϑ abhängige Maxima und ebenso viel Minima zu erwarten.

3. Weit einfacher gestalten sich die Verhältnisse, so weit sie die Frage über Maxima und Minima betreffen, wenn man die Curven der Tafel V auf ein anderes Coordinatensystem bezieht, nämlich: auf ein System, dessen Axen mit den Geraden zusammenfallen, worauf die beiden geradlinigen Componenten als wirkend zu denken sind: also kurz auf ein schiefwinkliges System, dessen X Axe mit der ursprünglichen einerlei, dessen neue Y Axe aber hiermit einen schiefen Winkel φ bildet. Da wir, um diese Veränderung vorzunehmen, nur

$$\text{statt } x \text{ ein } \frac{x \, . \sin\varphi - y \, . \cos\varphi}{\sin\varphi} = x - \frac{y\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\text{statt } y \text{ ein } \frac{y}{\sin\varphi}$$

zu setzen haben, so verwandeln sich unsere Gleichungen I in folgende:

$$x = A . \sin 2m\pi(t+\vartheta) + B \sin 2n\pi t \cos\varphi - B \sin 2n\pi t \cos\varphi$$
$$y = B . \sin 2n\pi t$$

oder in:

$$\left.\begin{array}{l} x = A . \sin 2m\pi(t+\vartheta) \\ y = B . \sin 2n\pi t . \end{array}\right\} \quad \ldots. (16)$$

Suchen wir die Verhältnisse, von denen die Rede ist, bei diesem neuen Coordinatenkreuz kennen zu lernen. Die Maxima bei y treten ein, wenn:

$$\sin 2n\pi t = +1$$

d. h.

$$2n\pi t = \frac{4\varkappa+1}{2}\pi$$

oder:

$$t = \frac{4\varkappa+1}{4n} .$$

Ihre absolute Grösse ist $= B$, ihre Anzahl $= n$. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximis beträgt

$$\frac{4(\varkappa+1)+1}{4n} - \frac{4\varkappa+1}{4n}$$

oder:

$$\frac{1}{n} .$$

Die Minima für y treten ein für

$$t = \frac{4\varkappa+3}{4n} .$$

Auch hierbei verfliesst von einem zu dem nächstfolgenden eine Zeit gleich $\frac{1}{n}$. Zwischen einem Maximum und dem unmittelbar folgenden Mininum liegt daher die Zeit:

$$\frac{4(\varkappa+1)+1}{4n} - \frac{4\varkappa+3}{4n}$$

oder:

$$\frac{1}{2n},$$

woraus folgt, dass genau in der Mitte zwischen zwei Maximis ein Minimum und umgekehrt eintrifft.

Ein Maximum für x tritt auf, wenn:

$$\sin 2m\pi(t+\vartheta) = +1$$

d. h.

$$2m\pi(t+\vartheta) = \frac{4\varkappa+1}{2}\pi$$

oder:

$$t = \frac{4\varkappa+1}{4m} - \vartheta.$$

Ebenso ein Minimum für:

$$t = \frac{4\varkappa+3}{4m} - \vartheta.$$

Während also die Maxima und Minima von y nach jeder Richtung hin von ϑ unabhängig sich zeigten, ist dies bei x zwar nicht der Fall, jedoch erkennt man sofort, dass die Anzahl der Maxima und Minima gleich m, dass die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Maximis und Minimis gleich $\frac{1}{m}$, zwischen einem Maximum und dem nächstfolgenden Minimum oder umgekehrt gleich $\frac{1}{2m}$, dass ferner die absolute Grösse der Maxima und Minima gleich A, dass mithin die Curven in ein schiefwinkliges Parallelogramm eingeschrieben werden können, wie wir uns im ersten Theile, einer andern Schlussweise zur Folge bereits überzeugt haben.

Es ist ein Leichtes, aus den beiden Gleichungen (16) die Grösse t zu eliminiren, um so schliesslich die Gleichung

$$\Phi(x, y) = 0$$

zwischen x und y zu erhalten. Es ist nämlich:

$$\arcsin\frac{x}{A} = 2m\pi(t+\vartheta)$$

und

$$\arcsin\frac{y}{B} = 2n\pi t$$

mithin

$$\frac{1}{m}\arcsin\frac{x}{A} - \frac{1}{n}\arcsin\frac{y}{B} - 2\pi\vartheta = 0$$

oder:

$$n\arcsin\frac{x}{A} - m\arcsin\frac{y}{B} = 2mn\pi\vartheta \qquad \dots. (17)$$

oder auch:

$$y = B\sin\left\{\frac{n}{m}\arcsin\frac{x}{A} - 2n\pi\vartheta\right\}. \qquad \dots. (18)$$

Den grössten Werth erlangt x offenbar, wenn

$$x = +A$$

d. h.

$$\arcsin\frac{x}{A} = \frac{4\varkappa+1}{2}\pi$$

geworden, oder:

$$y = B \, . \sin\pi\left\{\frac{n}{m} . \frac{4\varkappa+1}{2} - 2n\vartheta\right\} . \qquad \ldots . \; (19)$$

Aus dieser Gleichung können die absoluten Grössen der zu den Maximalwerthen von x gehörigen y gefunden werden, wenn man nach einander

$$\varkappa = 0, \; 1, \; 2 \ldots .$$

setzte. Auch könnte uns diese Gleichung bei gehöriger Benutzung zu solchen Werthen von ϑ verhelfen, für welche vereinfachte Curven auftreten. Nehmen wir beispielshalber $m=2$; $n=1$, so ergiebt sich:

$$y = B \, . \sin\pi\left\{\frac{4\varkappa+1}{4} - 2\vartheta\right\}$$

und offenbar treten vereinfachte Curven auf, wenn zwei aus dieser Gleichung als benachbarte folgende Werthe von y einander gleich sind, d. h. wenn:

$$\sin\pi\left\{\frac{4\varkappa+1}{4} - 2\varDelta\right\} = \sin\pi\left\{\frac{4(\varkappa+1)+1}{4} - 2\varDelta\right\},$$

also wenn:

$$\pi\left(\frac{4\varkappa+1}{4} - 2\varDelta\right) = \lambda\pi + (-1)^{\lambda}\pi\left\{\frac{4(\varkappa+1)+1}{4} - 2\varDelta\right\}$$

oder:

$$\frac{4\varkappa+1}{4} - (-1)^{\lambda}\,\frac{4(\varkappa+1)+1}{4} - \lambda = 2\varDelta\left[1 - (-1)^{\lambda}\right],$$

wobei λ aber nur ungerade Werthe annehmen darf. Für $\lambda=1$; $\varkappa=0$ also, wenn:

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - 1 = 4\varDelta$$

d. h.

$$\varDelta = \frac{2}{16} .$$

4. Die sämmtlichen Resultate, welche wir soeben unter 3 gewonnen, gelten unmittelbar auch für die Curven der Taf. VI. Denn die Gleichungen dieser sind ja keine andern als die Gleichungen (16), wenn man sie nur im Sinne eines rechtwinkligen Coordinatenkreuzes auffasst.

5. Bei den Curven unserer Taf. VIII bis X, deren Gleichungen II oben gegeben wurden, hat wiederum die Auffindung der Maxima und Minima bei dem y keine Schwierigkeit. Es treten deren je n auf und zwar sind sie der absoluten Grösse nach gleich C. Die Gleichung für x lautet:

$$x = A \,.\, \sin 2m\pi\,(t+\vartheta) + B \,.\, \cos 2n\pi t$$

und es leuchtet ein, wie auch diese Gleichung, nach t differentiirt, ein $\frac{dx}{dt}$ liefert, das gleich Null gesetzt, schliesslich eine Gleichung $2m^{\text{ten}}$ oder $2n^{\text{ten}}$ Grads liefert, je nachdem m oder n die grössere Schwingungszahl ist. Wir werden also auch im Allgemeinen beziehungsweise m oder n Maxima und m oder n Minima für x zu erwarten haben. Eine Vereinfachung, erzielt durch Vertauschung des Coordinatensystems, steht nicht zu erwarten. Die Auffindung der Maxima-Maximorum und Minima-Minimorum für x unterliegt dagegen keiner Schwierigkeit. Erstere treten auf, wenn:

$$\sin 2m\pi\,(t+\vartheta) = +1$$

und gleichzeitig:

$$\cos 2n\pi t = +1$$

wird, d. h. wenn:

$$2m\pi\,(t+\vartheta) = \frac{4\varkappa+1}{2}\,\pi$$

und gleichzeitig:

$$2n\pi t = 2\lambda\pi$$

oder kurz, wenn:

$$\vartheta = \frac{(4\varkappa+1)n - 4\lambda m}{4mn}$$

oder wenn:

$$\vartheta = \frac{K}{mn} + \frac{1}{4m} \,. \qquad \ldots\ (20)$$

Für $m=4$; $n=3$, z. B. wenn:

$$\vartheta = \frac{K}{12} + \frac{1}{16} = \frac{8K+6}{96}\,,$$

d. h. für:

$$\vartheta = \frac{6}{96},\ \frac{14}{96}\ \ldots\ldots$$

Für $m=2$ und $n=3$ z. B. wenn:

$$\vartheta = \frac{K}{6} + \frac{1}{8} = \frac{8K+6}{48}$$

d. h. für:

$$\vartheta = \frac{6}{48}, \frac{14}{48} \ldots$$

Die Minima-Minimorum treten auf wenn:

$$\sin 2m\pi (t+\vartheta) = -1$$

und gleichzeitig:

$$\cos 2n\pi t = -1$$

d. h. wenn:

$$2m\pi (t+\vartheta) = \frac{(4\varkappa+3)}{2} \pi$$

und:

$$2n\pi t = (2\lambda+1)\pi$$

d. h. wenn:

$$\vartheta = \frac{(4\varkappa+3)n - 2(2\lambda+1)m}{4mn}$$

d. h. wenn:

$$\vartheta = \frac{K}{mn} + \frac{3n-2m}{4mn} \quad \ldots. (21)$$

Für $m=n=1$ z. B. wenn:

$$\vartheta = K + \frac{1}{4} = \frac{8K+2}{8}$$

d. h.

$$\vartheta = \frac{2}{8}, \frac{10}{8}, \frac{18}{8} \ldots$$

Für $m=1$; $n=2$ (Taf. IX) wenn:

$$\vartheta = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8K+8}{16}$$

d. h. für:

$$\vartheta = 0, \frac{8}{16}, 1 \ldots\ldots$$

6. Was die Maxima und Minima der Curven auf Taf. XI anlangt, so ist die Auffindung bei dem x wie dem y mit denselben Schwierigkeiten verbunden, wie es bei den bisherigen Fällen für das x allein war. Da n bei der Taf. XI die grössere Schwingungszahl ist, so werden die Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gleich Null gesetzt, schliesslich zu zwei Gleichungen vom $2n^{\text{ten}}$ Gerade führen, so dass wiederum für x wie für y, n Maxima und n Minima zu erwarten sind. Leichter ist das Auffinden der Maxima-Maximorum und Minima-Minimorum. Erstere finden für x statt, wenn in den Gleichungen III:

$$\cos 2m\pi t = +1$$
$$\cos 2n\pi\,(t+\vartheta) = +1$$

für y wenn:

$$\sin 2m\pi t = +1$$
$$\sin 2n\pi t\,(t+\vartheta) = +1,$$

d. h. für x wenn:

$$2m\pi t = 2\lambda\pi$$
$$2n\pi\,(t+\vartheta) = 2\varkappa\pi$$

oder

$$\vartheta = \frac{\varkappa m - \lambda n}{mn}$$

d. h. für:

$$\vartheta = \frac{K}{mn} \qquad \ldots. \; (22)$$

Für y wenn:

$$2m\pi t = \frac{4\varkappa+1}{2}\,\pi$$
$$2n\pi\,(t+\vartheta) = \frac{4\lambda+1}{2}\,\pi$$

d. h. wenn:

$$\vartheta = \frac{K}{mn} - \frac{n-m}{4mn} \qquad \ldots. \; (23)$$

Nach (22) also für x unter der Voraussetzung, dass $n=m=1$, wenn:

$$\vartheta = 0,\ 1,\ 2\ \ldots..$$

und nach (23) auch für y, wenn:

$$\vartheta = 0,\ 1,\ 2\ \ldots..$$

Fragen wir: wenn ein Maximum-Maximorum von x und ein Maximum-Maximorum von y gleichzeitig auftrete, so müssen die Werthe von ϑ aus (22) und (23) erhalten, gleich sein, d. h. es muss:

$$\frac{K_{,,}}{mn} - \frac{n-m}{4mn} = \frac{K_{,}}{mn}$$

oder:

$$4\,(K_{,,} - K_{,}) = n-m$$

sein. Da links nur immer eine gerade Zahl entsteht, so leuchtet ein, dass überhaupt nur Werthe von $K_{,}$ und $K_{,,}$ existiren, wenn $n-m$ eine gerade Zahl, d. h. wenn n und m gleichzeitig ungerad, aber auch dann nur, wenn $n-m$ eine durch 4 theilbare Zahl ist; also z. B. für $(n-m) = 0$ oder $n-m = 4$: d. h. für $n = m = 1$ oder: $n = 5$ und $n = 1$.

Ein Minimum-Minimorum von x findet statt, wenn:

$$\cos 2m\pi t = -1$$
$$\cos 2n\pi (t+\vartheta) = -1$$

für y wenn:

$$\sin 2m\pi t = -1$$
$$\sin 2n\pi (t+\vartheta) = -1$$

d. h. für x wenn:

$$2m\pi t = (2\varkappa+1)\pi$$
$$2n\pi (t+\vartheta) = (2\lambda+1)\pi$$
$$\vartheta = \frac{(2\lambda+1)m-(2\varkappa+1)n}{2mn}$$

oder:

$$\vartheta = \frac{K}{mn} - \frac{n-m}{2mn} \qquad \ldots. (24)$$

ist. Für y wenn:

$$2m\pi t = \frac{4\varkappa+3}{2}\pi$$
$$2n\pi (t+\vartheta) = \frac{4\lambda+3}{2}.\pi$$
$$\vartheta = \frac{(4\lambda+3)m-(4\varkappa+3)n}{4mn}$$

oder:

$$\vartheta = \frac{K}{mn} - \frac{3.(n-m)}{4mn} \qquad \ldots. (25)$$

ist. Für $n=4$; $m=1$; z. B. wenn:

$$\vartheta = \frac{K}{4} - \frac{9}{16} = \frac{8K-18}{32}$$

d. h. für:

$$\vartheta = -\frac{2}{32}, \frac{6}{32}, \frac{14}{32} \ldots\ldots$$

Die richtige Benutzung der letzten vier Gleichungen (22), (23), (24), (25) kann auch noch die Fragen lösen: bei welchen Curven trifft ein Maximum-Maximorum von x mit einem Minimum-Minimorum von y oder umgekehrt ein?

§. 31.

Die Beziehung der Schwingungscurven zur Cylinderfläche. Stereoscopische Erscheinungen.

1. Die Gleichung einer Sinuslinie, wenn y die Ordinate, x die Abscisse, l die Länge, welche ein Berg und Thal zusammen einnimmt, ferner B die grösste Ordinate bedeutet, ist:

$$y = B . \sin \frac{2\pi x}{l} \quad \ldots . \ (1)$$

und ich will eine solche Curve eine »einfache Sinuslinie« nennen. Gehen dagegen auf die Länge l nicht ein Wellenberg und Wellenthal, sondern n, so ist die Gleichung einer solchen Curve, die kurz eine »$n$fache« heissen möge:

$$y = B \sin \frac{2n\pi x}{l} . \quad \ldots . \ (2)$$

Ohne Zweifel wird diese Gleichung aber eine allgemeinere, wenn wir dem x eine Constante hinzufügen, d. h. dem y eine Phasendifferenz ertheilen und statt (2) schreiben

$$y = B \frac{\sin 2n\pi (x+d)}{l} . \quad \ldots . \ (3)$$

Wir wollen die Aufgabe stellen: Welches sind die Gleichungen jener räumlichen Curve, welche entsteht, wenn wir die ebene Curve, deren Gleichung (3) ist, gerade m mal um einen geraden kreisförmigen Cylinder herumwickeln, und zwar so, dass die Ordinaten y parallel laufen mit der Axe des Cylinders?

Ist:

$$x^2 + z^2 = A^2 \quad \ldots . \ (4)$$

die Gleichung der Cylinderfläche, so muss, wenn l gegeben ist, der gestellten Aufgabe gemäss A so gewählt werden, dass:

$$A = \frac{l}{2m\pi}$$

oder, wenn A gegeben ist, l so gewählt werden, dass

$$l = 2mA\pi$$

d. h.

$$y = B . \sin \left\{ \frac{n}{mA} . (x+d) \right\} . \quad \ldots . \ (5)$$

ist. Um nun unsere Aufgabe zu lösen, ist bekannten Grundsätzen gemäss nur nöthig, statt

$$x \text{ ein } A . \operatorname{arctang} \frac{x}{z}$$

zu setzen, um sofort in den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} y &= B \sin \left[\frac{n}{mA} \left(A . \operatorname{arctang} \frac{x}{z} + d \right) \right] \\ x^2 + z^2 &= A^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots . \ (6)$$

die gesuchten Gleichungen der räumlichen Curve zu besitzen. Eliminiren wir aus ihnen z, so ergiebt sich die Gleichung für die Projection der räumlichen Curven in der xy Ebene. Da aber

$$\operatorname{arctang} \frac{x}{\sqrt{A^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{A},$$

so folgt, dass diese Projectionsgleichung:

$$y = B \sin \left\{ \frac{n}{mA} \left[A . \arcsin \frac{x}{A} + d \right] \right\}$$

oder

$$\arcsin \frac{y}{B} = \frac{n}{m} \arcsin \frac{x}{A} + \frac{n}{mA} . d$$

oder

$$n \arcsin \frac{x}{A} - m \arcsin \frac{y}{B} = - \frac{n}{A} . d \qquad \ldots . (7)$$

ist, welche Gleichung sofort mit der Gleichung (17) des vorigen § identisch wird, falls wir

$$\frac{n}{A} d = -2mn\pi\vartheta$$

d. h.

$$d = -2mA\pi\vartheta$$

oder auch gemäss der Bedeutung von $2mA\pi$

$$d = -l\vartheta,$$

oder auch, da nichts im Wege steht, l als Einheit zu wählen, einfach

$$d = -\vartheta$$

setzen, und unser Resultat wäre etwa in folgender Weise auszudrücken:

»Bedeuten x und y die beiden geradlinigen und recht»winkligen Componenten einer ebenen Schwingungscurve mit »den resp. Schwingungszahlen m und n und besitzt die er»stere eine Phasendifferenz gleich $+\vartheta$, so kann diese ebene »Curve auch dadurch dargestellt werden, dass man eine »$m$fache Sinuslinie mit der Phasendifferenz gleich $-\vartheta$ (auf »die Ordinaten bezogen, vergl. §. 5, 1) m mal um einen ge»raden kreisförmigen Cylinder mit dem Umfange $\frac{1}{m}$ herum legt »und die so entstandene räumliche Curve auf die durch die »Coordinaten der Sinuslinie bezeichnete Coordinatenebene »oder auch auf eine hierzu parallele Ebene projicirt.«

Da ein Auge dieses Projiciren unmittelbar bei dem Anblick der räumlichen Curve vornimmt, so haben wir also nur nöthig, »aus möglichster Entfernung nach dem Cylinder in der Rich- »tung der Z Axe hinzusehen, um sofort die Curven der »Taf. VI zu erblicken.«

2. Wir haben jedoch nicht nöthig, die Phasendifferenz bei der ursprünglichen Sinuslinie zu berücksichtigen, sondern wir dürfen sie ursprünglich gleich Null annehmen, unmittelbar die, durch die Gleichung (2) bezeichnete, Sinuslinie um den Cylinder legen, und eine Drehung des Cylinders vornehmen, um sofort alle ebenen Curven der Taf. VI mit den verschiedensten Phasendifferenzen in der Projection zu erblicken.

Denn die Gleichungen der räumlichen Curve sind nunmehr

$$\left.\begin{aligned} y &= B \sin\left[\frac{n}{mA}\left(A \operatorname{arctang}\frac{x}{z}\right)\right] \\ x^2 + z^2 &= A^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots. (8)$$

oder die Gleichung der Projection in der XY Ebene:

$$y = B \sin\left(\frac{n}{m} \arcsin\frac{x}{A}\right). \quad \ldots. (9)$$

Denken wir nun den Cylinder und mit ihm die Curve (8) herumgedreht, so werden wir, um statt (9) zur veränderten Projections-Gleichung zu gelangen, nur statt x

$$x \cos w - z \sin w$$

statt z

$$x \sin w + z \cos w$$

zu setzen haben, um die Gleichungen (8) zu verwandeln in:

$$\left.\begin{aligned} y &= B \sin\left(\frac{n}{m} . \operatorname{arctang}\frac{x\cos w - z \sin w}{x \sin w + z \cos w}\right) \\ x^2 + z^2 &= A^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots. (10)$$

sowie bei der Elimination von z die Gleichung (9) in:

$$y = B \sin\left\{\frac{n}{m} . \operatorname{arctang}\frac{x \cos w - \sqrt{A^2 - x^2} . \sin w}{x \sin w + \sqrt{A^5 - x^2} . \cos w}\right\}$$

oder mit Rücksicht auf die Reduktionsformel:

$$\operatorname{arctang} u = \arcsin\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}$$

nach einer kurzen Rechnung auch:

$$y = B \sin\left\{\frac{n}{m} \arcsin\frac{x \cos w - \sqrt{A^2 - x^2} . \sin w}{A}\right\}$$

oder

$$m \arcsin \frac{y}{B} = n \arcsin \frac{x \cos w - \sqrt{A^2 - x^2} \sin w}{A}.$$

Setzen wir aber:

$$\frac{x}{A} = \sin r, \text{ mithin } \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A} = \cos r$$

so ist:

$$\frac{x \cos w - \sqrt{A^2 - x^2} . \sin w}{A} = \sin (r - w)$$

mithin

$$\arcsin \frac{x \cos w - \sqrt{A^2 - x^2} . \sin w}{A} = r - w$$

$$= \arcsin \frac{x}{A} - w$$

mithin

$$m \arcsin \frac{y}{B} = n \arcsin \frac{x}{A} - nw, \qquad \dots. \ (11)$$

welche Gleichung sofort unsere Gleichung (17) des vorigen §. liefert, wenn wir

$$nw = 2mn\pi\vartheta$$

oder

$$w = 2m\pi\vartheta$$

wählen, und hiermit ist folgender Satz, dessen Richtigkeit schon Lissajous, jedoch nach geometrischen Gründen dargethan hat, analytisch streng bewiesen:

»Legt man die ebene Curve, deren Gleichung

$$y = B . \sin 2n\pi t$$

»ist, $m$mal um einen geraden kreisförmigen Cylinder mit dem »Radius

$$A = \frac{1}{2m\pi},$$

»so herum, dass ihre Ordinaten y mit der Axe des Cylinders »parallel laufen, so entsteht auf diesem eine räumliche Curve »von solcher Beschaffenheit, dass, wenn man den Cylinder »mit ihr um einen Winkel w dreht und dann ihre Projection »in einer mit der ursprünglichen XY Ebene parallelen Ebene »entwirft, diese Projection eine Schwingungscurve vorstellt, »welche in zwei geradlinige mit der ursprünglichen X und Y »Axe parallele Vibrationscomponenten mit den bezüglichen »Schwingungszahlen m und n, und den Elongationsweiten

»*A* und *B* zerlegt werden kann und wobei die erstere Com»ponente eine Phasendifferenz

$$\vartheta = \frac{w}{2m\pi}$$

»erhält.«

Ebenso leuchtet ein, wie ein in der Richtung der ursprünglichen *Z* Axe aus möglichster Entfernung nach der räumlichen Curve sehendes Auge bei dieser Revolution des Cylinders ebene Schwingungscurven von genanntem Charakter zu sehen glaubt.

Um diese Verhältnisse wirklich durch den Versuch kennen zu lernen, kann man wohl auf mancherlei Weise verfahren. Am besten und einfachsten wird es sein, wenn man einen dünnwandigen Glascylinder nimmt und auf ihm die räumliche Curve in irgend welcher Weise bezeichnet.

3. Diese interessante Beziehung der Curven auf Taf. VI zur geraden kreisförmigen Cylinderfläche gestattet noch in anderer Beziehung, wie Lissajous gezeigt hat, eine nette Anwendung. Es wurde soeben angeführt, dass das aus möglichster Entfernung auf den Cylinder sehende Auge eine ebene Schwingungscurve erblickt und es wird dies natürlich auch dann noch der Fall sein, wenn das Auge näher heran geht. Blickt man aus grösserer Nähe mit beiden Augen den Cylinder an, so wird statt der ebenen Erscheinung die räumliche auftreten. Denn die beiden Bilder, welche die beiden Augen von der räumlichen Curve bekommen, sind verschieden. Daraus folgt aber, dass man auch aus dem Anblicke zweier ebenen Curven, wenn sie dem Unterschiede, wie er durch den Anblick mit beiden Augen zum Vorschein kommt, entsprechen, sobald jene beiden ebenen Bilder unter das Stereoscop gebracht werden, die räumliche Curve auf dem Cylinder zu sehen glaubt. Um die beiden ebenen Bilder, welche zum räumlichen Bilde im Stereoscop zusammengesetzt werden sollen, zu erhalten, hat man offenbar nur nöthig, nach unsern im ersten Theile angeführten Methoden, für zwei verschiedene Werthe von ϑ die ebenen Zeichnungen zu entwerfen. Gesetzt, die beiden Sehaxen bildeten beim deutlichen Sehen einen Winkel von 15^0 mit einander, so müsste man zwei Curven zeichnen, bei denen die Winkel w und $w + 15^0$ stattfänden oder da $15^0 = \frac{\pi}{12}$, zwei ebene

Curven, bei welchen einmal $\vartheta = \frac{w}{2m\pi}$, das anderemal $\vartheta = \frac{w}{2m\pi} + \frac{1}{24 . m}$. Gehen wir also für das Bild, mit dem linken Auge gesehen, von einem Winkel $w = 0$ aus, so müsste in dem Bilde fürs rechte Auge eine Phasendifferenz gleich $\frac{1}{24 . m}$ in der Zeichnung wieder gegeben werden.

4. Die bisher besprochenen Eigenschaften der Schwingungscurven bezogen sich offenbar nur auf die Curven der Taf. VI und es können nicht unmittelbar dieselben Sätze auch bei schiefem Cylinder und für die Curven mit zweien schiefwinkligen Componenten also der Taf. V angewandt werden. Ihre Gleichungen sind, wie wir wissen

$$x = A . \sin 2m\pi\,(t + \vartheta) + B \sin 2n\pi t . \cos\varphi$$
$$y = B . \sin 2n\pi t . \sin\varphi .$$

und es ist leicht, auch aus diesen Gleichungen das t zu eliminiren. Die unterste liefert:

$$t = \frac{1}{2n\pi} . \arcsin \frac{y}{B . \sin\varphi},$$

welcher Werth, in die obere eingeführt,

$$x = A . \sin 2m\pi \left\{ \frac{1}{2n\pi} \arcsin \frac{y}{B . \sin\varphi} + \vartheta \right\} + y . \operatorname{cotg}\varphi \quad \dots . (12)$$

macht. Im ersten Theile §. 4, 6 war die Rede von Wellencurven oder Sinuscurven »zweiter Ordnung.« Bezeichnen wir die Abscissen einer solchen Curve mit y, die Ordinaten mit x, die Schwingungszahlen mit m und n, die Phasendifferenz mit d, die Länge mit l, die Elongationsweiten mit A und $B . \cos\varphi$, so ist die Gleichung einer solchen Sinuscurve zweiter Ordnung:

$$x = A . \sin \frac{2m\pi\,(y + d)}{l} + B . \sin \frac{2n\pi y}{l} . \cos\varphi \quad \dots . (13)$$

und wir wollen sie um einen geraden kreisförmigen Cylinder, dessen Gleichung

$$y^2 + z^2 = B^2 . \sin\varphi^2 \quad \dots . (14)$$

sein soll, n mal herumlegen und die so entstandene räumliche Curve wieder auf die XY Ebene oder eine hierzu parallele

Ebene projiciren. Soll dies aber überhaupt möglich sein, so muss der Radius des Cylinders, nämlich $B.\sin\varphi$, in bestimmter Weise mit l zusammenhängen, es muss nämlich:

$$l = 2n\pi . B . \sin\varphi \quad \ldots . (15)$$

oder wenn wir l als Einheit annehmen:

$$1 = 2n\pi B . \sin\varphi \quad \ldots . (16)$$

sein. Letzterer Annahme gemäss wird die Gleichung (13) zu

$$x = A . \sin 2m\pi\,(y + d) + B . \cos\varphi . \sin 2n\pi y .$$

Setzen wir hierin statt y gleich*):

$$B.\sin\varphi . \arcsin \frac{y}{B.\sin\varphi}$$

ein, so stellen die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = A . \sin 2m\pi \left\{ B . \sin\varphi . \arcsin \dfrac{y}{B.\sin\varphi} + d \right\} + \\ \quad + B . \cos\varphi . \sin 2n\pi . \left\{ B.\sin\varphi . \arcsin \dfrac{y}{B.\sin\varphi} \right\} \\ \quad y^2 + z^2 = B^2 \sin\varphi^2 \end{array}\right\} \ldots . (17)$$

die Gleichungen der räumlichen Cylindercurve vor und die erstere von ihnen unmittelbar die Gleichung der Projection in der XY Ebene. Gemäss der Gleichung (16) ist aber

$$B.\sin\varphi = \frac{1}{2n\pi},$$

welcher Werth an zwei Stellen in die oberste der Gleichungen (17) eingeführt

$$x = A.\sin 2m\pi \left\{ \frac{1}{2n\pi} . \arcsin \frac{y}{B.\sin\varphi} + d \right\} + \\ + y . \operatorname{cotg}\varphi$$

liefert, eine Gleichung, die vollständig indentisch mit der Gleichung (12), als der Gleichung der Curven auf Taf. V gemacht wird, wenn wir nur auch statt d ein ϑ schreiben.

Dieses Resultat lässt sich aber in folgender Weise ausdrücken:

»Wirken zwei geradlinige Vibrationscomponenten mit »den Schwingungszahlen m und n, mit der Phasendifferenz ϑ,

*) Auch in die Gleichungen (6) und (8) hätten wir unmittelbar anstatt eines Arctang. einen Arcsin. einführen können.

»den Elongationsgrenzen A und B, zusammen und zwar unter »einem Winkel $=\varphi$, so lässt sich die hierdurch resultirende »ebene Schwingungscurve auch durch Projiciren einer räum- »lichen Curve darstellen, welche letztere dadurch erhalten »wird, dass man eine Sinuslinie »zweiter Ordnung« n mal um »einen geraden kreisförmigen Cylinder herumwickelt, falls »man nur diese Sinuslinie vorher so construirt, dass ihre »Componenten die Elongationsgrenzen A und $B\cos\varphi$, ferner »beziehungsweise die Schwingungszahlen m und n, sowie »die Phasendifferenzen ϑ und 0 erhalten, falls man ferner die »Ordinaten der Sinuslinie zweiter Ordnung mit der Axe des »Cylinders parallel laufen lässt und, wenn y und x diese »Coordinaten bedeuten, die entstandene räumliche Curve auf »die XY Ebene oder eine hierzu parallele Ebene projicirt.«

5. Wir haben in 2. gesehen, dass die verschiedenen Phasendifferenzen auch dadurch erhalten werden konnten, dass man bei der Sinuslinie, welche um den Cylinder herumgelegt wurde, die Phasendifferenz gleich Null machte und dann den Cylinder drehte. Wir wollen auch in unserm jetzigen Falle das ϑ gleich Null setzen, die Sinuslinie zweiter Ordnung, deren Gleichung nunmehr:

$$x = A.\sin 2m\pi y + B\cos\varphi . \sin 2n\pi y$$

ist, n mal um den Cylinder

$$y^2 + z^2 = B^2 \sin\varphi^2$$

herum legen, letztere dann um einen Winkel w drehen und zusehen, was für eine Projection entsteht. Ist w gleich Null, so ist die Gleichung der Projection:

$$x = A.\sin 2m\pi \left\{\frac{1}{2n\pi} \arcsin \frac{y}{B.\sin\varphi}\right\} + y . \operatorname{cotg}\varphi$$

und um sie für einen Winkel w zu erhalten ist nur nöthig, statt y ein

$$y \cos w - z . \sin w$$

zu setzen. Dieses liefert aber:

$$x = A.\sin 2m\pi \left\{\frac{1}{2n\pi} \arcsin \frac{y . \cos w - z \sin w}{B.\sin\varphi}\right\} +$$

$$+ (y \cos w - z \sin w) \operatorname{cotg}\varphi$$

oder wenn man auf die Umformungen achtet, welche der Ausdruck $\arcsin \frac{y \cos w - z \sin w}{B . \sin \varphi}$ gestattet, falls vorher statt z

$$\sqrt{B^2 \sin \varphi^2 - y^2}$$

gesetzt wird,

$$x = A . \sin 2m\pi \left\{ \frac{1}{2n\pi} \left(\arcsin \frac{y}{B . \sin \varphi} - w \right) \right\} +$$

$$+ (y \cos w - \sqrt{B^2 \sin \varphi^2 - y^2} \sin w) \operatorname{cotg} \varphi \quad \ldots . \ (18)$$

Diese Gleichung ist aber, auch wenn $w = -2n\pi\vartheta$ gesetzt würde, nicht identisch mit der Gleichung (12), sie gehört vielmehr einer Curve an, welche sich in die beiden Componenten:

$$\left. \begin{array}{l} x = A . \sin 2m\pi \left(t - \frac{w}{2n\pi} \right) + B . \cos \varphi . \sin 2n\pi \left(t - \frac{w}{2n\pi} \right) \\ y = B \sin \varphi . \sin 2n\pi t \end{array} \right\} \quad \ldots . \ (19)$$

zerlegen lässt. Bei genauerer Betrachtung, welche hier nicht weiter angestellt werden soll, würde sich zeigen, dass dieses letztere System von Gleichungen nicht immer zurückgeführt werden kann auf das System I, dass es mithin im Allgemeinen unmöglich ist: durch Drehung des Cylinders mit der räumlichen Curve

$$x = A . \sin 2m\pi y + B . \cos \varphi . \sin 2n\pi y$$
$$y^2 + z^2 = B^2 \sin \varphi^2$$

die verschiedenen Phasendifferenzen in der Projection zu erzeugen.

6. Die Gleichungen für die Curven der Taf. VIII bis X sind:

$$\left. \begin{array}{l} x = A . \sin 2m\pi (t + \vartheta) + B . \cos 2n\pi t \\ \eta = B . \sin 2n\pi t \end{array} \right\} \quad \ldots . \ (20)$$

und auch diese Curven können leicht durch Projiciren einer räumlichen Cylindercurve erhalten werden, nämlich der Curve, welche auf dem Cylinder entsteht, wenn die Sinuslinie zweiter Ordnung, deren Gleichung:

$$x = A . \sin 2m\pi (y + \vartheta) + B . \cos 2n\pi y \quad \ldots . \ (21)$$

auf dem Cylinder

$$y^2 + z^2 = C^2 \quad \ldots . \ (22)$$

n mal herumgelegt wird. Denn die Gleichungen der räumlichen Curve sind:

$$\left.\begin{array}{c} x = A.\sin 2m\pi\left[C\arcsin\frac{y}{C} + \vartheta\right] + B\cos 2n\pi\left[C\arcsin\frac{y}{C}\right] \\ y^2 + z^2 = C^2, \end{array}\right\}\ldots (23)$$

wovon die obere unmittelbar auch als Gleichung der Projection in der XY Ebene angesehen werden muss. Eliminiren wir aber aus (20) das t, so folgt:

$$x = A.\sin 2m\pi\left\{\frac{1}{2n\pi}\arcsin\frac{y}{C} + \vartheta\right\} +$$
$$+ B.\cos 2n\pi\left\{\frac{1}{2n\pi}\arcsin\frac{y}{C}\right\},$$

welche Gleichung sich mit der obersten in (23) als identisch herausstellt, falls wir nur bedenken, dass dort C der gestellten Aufgabe gemäss gleich $\frac{1}{2n\pi}$ sein muss.

Auch jetzt würde sich zeigen lassen, dass durch Rotation des Cylinders die Phasendifferenzen nicht in continuirlicher Folge verändert werden können, sei es nun, dass man die Curve (20) oder eine mit andern Phasendifferenzen versehene vorher um den Cylinder herumgelegt hätte.

7. Noch bleibt zu untersuchen übrig, ob man auch die Curven der Taf. XI durch Abwickelung einer Sinuscurve auf einem geraden kreisförmigen Cylinder und durch Projiciren der hierdurch entstehenden räumlichen Curve erhalten kann. Die genannte Eigenschaft der Sinuslinien und der geraden kreisförmigen Cylinderfläche hat ihren Grund darin, dass die Abscissen bei der Aufwickelung in Kreisbögen übergehen, welche letztere, auf eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade projicirt, sich in Sinuslängen verwandeln, während die Ordinaten ungeändert bleiben. Die Abscissen können daher nach der Projection auch nur eine Componente liefern von der Form $A.\sin 2m\pi\ (t+\vartheta)$ und alle Schwingungscurven, deren eine Componente diese Form besass, konnten somit durch Aufwickelung und Projection wieder dargestellt werden. Da aber bei den Curven der Taf. XI beide Componenten von der Form

$$A.\sin 2m\pi t + B.\sin 2n\pi\ (t+\vartheta)$$

sind, so lässt sich zwar die eine in der genannten Weise darstellen, die andere dagegen nicht, und es ist somit unmöglich, durch Herumlegen der Sinuslinie »zweiter Ordnung« um einen

Cylinder und Projection auf eine Ebene die Curven der Taf. XI zu erhalten.

Zum Schlusse dieses Paragraphen möchte ich zur nähern und einfachen Bezeichnung der Sinuslinien eine Bemerkung machen. Ich habe oben den Fall, wo n ganze Wellen (Berg und Thal zusammengenommen) auf die Länge $= l$ oder auch die Länge $= 1$ gehen, eine »$n$fache« Sinuslinie genannt. Wird hiermit eine »$m$fache« zweite Sinuscurve combinirt, so erhalten wir die Curven der Tafel VII und solche Sinuslinien habe ich »Sinuslinien zweiter Ordnung« genannt, so dass also die Componenten als Sinuslinien »erster Ordnung« zu bezeichnen wären. Demnach ist auch verständlich, dass eine Sinuslinie »dritter Ordnung« als Resultante aus drei Sinuslinien »erster Ordnung« anzusehen ist. Sollten diese Bezeichnungen Auffälliges enthalten, so kann man einfach etwa folgende anwenden. Nehmen wir die Länge l als Einheit an, so ist uns jede Componente und mithin auch die Resultante bekannt, falls die Schwingungszahlen, die Elongationsweiten und die Phasendifferenzen der einzelnen Componenten bekannt sind. Bezeichnen wir diese bei einer ersten Bezeichnungsweise mit m, a und ϑ, bei einer zweiten mit b, n und δ u. s. f., so würde die Bezeichnung »Sinuslinie $({}_a m_\vartheta)$« und »Sinuslinie $({}_b n_\delta)$« je eine Componente, dagegen die Bezeichnung »Sinuslinie $({}_a m_\vartheta + {}_b n_\delta)$« die Resultante aus den beiden Componenten vorstellen, und diese Bezeichnung würde sofort alles Wesentliche enthalten, um die Resultante zeichnen zu können. So würde z. B. der Ausdruck »Sinulinie $({}_a 2_{\frac{2}{16}} + {}_b 1_0)$« die dritte Curve in der zweiten Horizontalreihe der Taf. VII anzeigen.

§. 32.

Benutzung der »vereinfachten Curven« zur Bestimmung der absoluten Tonhöhe.

1. Die Abhandlung Lissajous' enthält noch eine sinnreiche Anwendung der Schwingungscurven bei der Bestimmung der absoluten Tonhöhe und zwar mit besonderer Rücksicht auf Stimmgabeln, wiewohl diese Anwendung keineswegs als auf letztere tongebende Körper beschränkt anzusehen ist. Das Wesen dieser Methode wird klar, wenn man Folgendes beach-

tet, dessen Darstellung in einer von der Lissajous'schen abweichenden Form zunächst von mir gegeben werden soll.

Bisher wurde vorausgesetzt, m und n seien ganze Zahlen, und es lag in dieser Voraussetzung für unsere Theorie keine Beschränkung. Für unsern jetzigen Zweck soll eine der Schwingungszahlen diesen Charakter verlieren und eine ganze Zahl nebst einem sehr kleinen Bruchtheile der Einheit vorstellen. Wird letzterer mit $\pm\mu$ bezeichnet, so wären die beiden Schwingungszahlen jetzt:

$$m\pm\mu$$

und

$$n.$$

Das Folgende bezieht sich ferner nur auf die Curven mit zweien geradlinigen Componenten und zwar am einfachsten auf die der Taf. VI. Die Gleichungen für diese Curven, sobald die eben angegebenen Schwingungszahlen benutzt werden, sind dann:

$$x = A \,.\, \sin 2(m\pm\mu)\pi(t+\vartheta) \qquad \ldots. \; (1)$$

$$y = B \,.\, \sin 2n\pi t. \qquad \ldots. \; (2)$$

Die rechte Seite der Gleichung (1) kann auch anders geschrieben werden, indem

$$A \sin 2(m\pm\mu)\pi(t+\vartheta) = A \sin 2m\pi\left(t \pm \frac{\mu t}{m} \pm \frac{\mu\vartheta}{m} + \vartheta\right)$$

oder

$$= A \sin 2m\pi \left[t + \left(\pm \frac{\mu t}{m} \pm \frac{\mu\vartheta}{m} + \vartheta\right)\right]$$

ist. Setzen wir demnach der Kürze halber:

$$\pm \frac{\mu t}{m} \pm \frac{\mu\vartheta}{m} + \vartheta = \Theta_t \qquad \ldots. \; (3)$$

durch welche Bezeichnung angedeutet werden soll, dass Θ eine von t abhängige, mithin variabele Phasendifferenz ist, so wird die Gleichung (1) jetzt zu

$$x = A \sin 2m\pi\,(t+\Theta_t) \qquad \ldots. \; (4)$$

und ist der Form nach mit der Gleichung für x in I_a insofern übereinstimmend, als auch bei ihr die Schwingungszahl eine ganze Zahl ist. Im Folgenden handelt es sich um den Anblick einer Curve; die Zeit, welche nöthig ist, um die Curve ganz im Gesichtseindruck zu behalten, ist nur eine geringe und, wenn auch die Phasendifferenz variabel ist, so wird das Auge

doch einen Moment lang eine Curve mit constanter Phasendifferenz vor sich zu haben glauben, d. h. wenn ich $t = t + \tau$ annehme, so würde in dem Momente $t + \tau$ und die unmittelbar darauf folgende jedoch sehr kurze Zeit das Auge eine Curve zu erblicken glauben, deren Gleichungen:

$$x = A . \sin 2m\pi (t + \tau + \Theta_{t+\tau})$$
$$y = B . \sin 2n\pi (t + \tau)$$

oder was hiermit einerlei ist, eine Curve, deren Gleichungen sind:

$$x = A . \sin 2m\pi (t + \Theta_{t+\tau})$$
$$y = B . \sin 2n\pi t .$$

Denn sind

$$x = A . \sin 2m\pi (t + D)$$
$$y = B . \sin 2n\pi (t + d)$$

die Gleichungen einer Schwingungscurve, so kann nach den Lehren des ersten Theils §. 5, 1 hierfür ein anderes System gesetzt werden, in welchem die Phasendifferenz am y gleich 0, dagegen statt D eine andere Phasendifferenz ϑ eingetreten ist, also ein System:

$$x = A . \sin 2m\pi (t + \vartheta)$$
$$y = B . \sin 2n\pi t .$$

Eliminiren wir aus dem erstern Systeme t, so folgt:

$$y = B . \sin 2n\pi \left(\frac{1}{2m\pi} . \arcsin \frac{x}{A} - D + d\right),$$

dagegen bei der Elimination aus dem zweiten Systeme:

$$= B . \sin 2n\pi \left(\frac{1}{2m\pi} \arcsin \frac{x}{A} - \vartheta\right).$$

Um also statt dem ersteren Systeme das zweite zu erhalten, wäre nur nöthig

$$\vartheta = D - d$$

zu setzen, wie unmittelbar auch einleuchtet, wenn man die Lehren des §. 5, 1 gehörig beachtet.

Soll das Auge nur vereinfachte Curven erblicken, so muss den Lehren des §. 25, 3 zu Folge Θ_t und $\Theta_{t+\tau}$ so beschaffen sein, dass im ersten Falle, wo m und n ungerade Zahlen vorstellen:

$$\Theta_t = \frac{K_{,}}{2mn}$$

$$\Theta_{t+} = \frac{K_{,,}}{2mn},$$

im zweiten und dritten Falle aber:

$$\Theta_t = \frac{2K_{,}+1}{4mn}$$

$$\Theta_{t+\tau} = \frac{2K_{,,}+1}{4mn}.$$

Denken wir vorläufig nur an den ersten Fall, so würde, wenn τ gerade die Zeit zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden vereinfachten Curven vorstellt,

$$\Theta_t = \frac{K}{2mn} \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\Theta_{t+\tau} = \frac{K+1}{2mn} \quad \ldots\ldots (6)$$

sein müssen. Subtrahiren wir aber (5) von (6) mit Rücksicht auf die Bedeutung von Θ_t und $\Theta_{t+\tau}$, so ergiebt sich:

$$\frac{\mu\tau}{m} = \pm \frac{1}{2mn}$$

oder auch:

$$\mu = \pm \frac{1}{2n\tau}, \quad \ldots\ldots (7)$$

woraus folgt, dass zunächst zur Bestimmung von μ nur n und τ nöthig sind. Letzteres kann aber mit Hilfe der Uhr bestimmt werden, falls nur μ klein genug, d. h. falls nur die Uebergänge der Curvenformen langsam genug vor sich gehen.

Da bei unsern letzten Ableitungen als Zeiteinheit die Zeit verstanden wird, innerhalb welcher die eine Gabel n die andere m Schwingungen vollendet, so ist offenbar τ als eine, nach diesem Zeitmaass gemessene, Grösse anzusehen. Wir wollen nun annehmen, es wäre neben dem Verhältnisse $\frac{m}{n}$ auch noch die absolute Zahl der Schwingungen einer Gabel und somit auch annähernd die der andern gegeben, d. h. es wären gegeben die Zahlen

$$N$$

und

$$\frac{N.m}{n},$$

so ist die Zeiteinheit, welche sich hierauf bezieht, die Secunde, und wollen wir diese Zeiteinheit verwandeln in Zeiteinheiten der Formel (7) entsprechend, so berücksichtige man Folgen-

des. Beobachtet man in der That mit Hülfe der Uhr zwischen dem Momente t und $t+\tau$ eine Anzahl T Secunden, so vollendet die eine Gabel 1 Schwingung in der Zeit

$$\frac{1}{N}$$

n Schwingungen in der Zeit

$$\frac{n}{N}$$

Secunden, welche letztere Grösse, absolut genommen, als Zeiteinheit in der Formel (7) anzusehen ist, und offenbar haben wir bei der Einführung der Secunde als Einheit statt τ ein

$$\frac{T}{\frac{n}{N}} = \frac{T.N}{n}$$

zu setzen, wodurch unsere Gleichung (7) wird

$$\mu = \pm \frac{1}{2T.N}. \qquad \ldots. (8)$$

Kennt man demnach die absolute Zahl der Schwingungen einer Gabel und die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden vereinfachten Schwingungscurven, so lässt sich μ finden. Auf 1 Schwingung von der Gabel, welcher das m angehört, gehen demnach $\frac{\mu}{m}$ oder

$$\pm \frac{1}{2m.T.N}$$

Schwingungstheile mehr oder weniger; auf $N.\frac{m}{n}$ Schwingungen aber

$$\pm \frac{1}{2T.n} \qquad \ldots. (9)$$

mehr oder weniger, d. h. während die eine Gabel N, die andere $N\frac{m}{n}$ Schwingungen vollendet, vollendet letztere auch noch $\pm \frac{1}{2Tn}$, d. h. sie vollendet in der Secunde überhaupt:

$$\frac{Nm}{n} \pm \frac{1}{2T.n} \qquad \ldots. (10)$$

Beispiel. Gesetzt, die eine Gabel mache 500 Schwingungen in der Secunde und es sei $\frac{m}{n} = \frac{5}{3}$; ferner ver-

fliesse von einer vereinfachten Curve bis zur nächsten die Zeit von 7,5 Secunden, so folgt, wenn $N = 500$ angenommen wird, für den Werth von (9)

$$\pm \frac{1}{2.3.7,5},$$

d. h. die andere Gabel macht in der Secunde

$$500 . \frac{5}{3} \pm \frac{1}{2.3.7,5}$$

oder

$$833 + \frac{1}{3} \pm \frac{1}{45}$$

Schwingungen.

Ob das + oder — Zeichen anzunehmen ist, ob mithin die höhere Gabel etwas zu hoch oder zu tief, kann leicht durch den Versuch gefunden werden, indem man die Gabel ein klein wenig belastet: erfolgen die Uebergänge langsamer, so führt die Belastung die Gabeln dem Verhältnis $\frac{m}{n}$ näher, die eine Gabel ist demnach etwas zu hoch, das μ ist als positiv anzusehen; erfolgen die Uebergänge rascher, so entfernt die Belastung die Gabeln vom Verhältnis $\frac{m}{n}$, die neue Gabel ist etwas zu tief und μ ist als negativ anzusehen.

Sind m und n nicht beide ungerad, so ist statt der Gleichungen (5) und (6) zu setzen:

$$\Theta_t = \frac{2K_{,} + 1}{4mn}$$

$$\Theta_{t+\tau} = \frac{2K_{,,} + 1}{4mn}$$

oder wenn man zwei unmittelbar folgende vereinfachte Curven berücksichtigt:

$$\Theta_t = \frac{2K + 1}{4mn}$$

$$\Theta_{t+\tau} = \frac{2(K+1) + 1}{4mn}$$

aus welchen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mu\tau}{m} = \pm \frac{1}{2mn}$$

oder

$$\mu = \pm \frac{1}{2nv}$$

was wiederum mit (7) übereinstimmt und woraus hervorgeht, dass eben die Gleichungen (7), (8), (9) und (10) für alle drei Fälle, welche bei dem Verhältnis vom $\frac{m}{n}$ eintreten können, giltig sind.

Bedeutet die Zahl T nicht die Zeit von einer vereinfachten Curve zur nächstfolgenden, sondern liegen deren p dazwischen, so ist offenbar statt T in obigen Formeln ein $\frac{T}{p}$ zu setzen, wodurch sich (9) und (10) verwandeln in:

$$\mu = \pm \frac{p}{2Tn} \quad \ldots\ldots (11)$$

$$\frac{N.m}{n} \pm \frac{p}{2Tn} \quad \ldots\ldots (12)$$

Beispiel. Lissajous nimmt in einem Beispiele an, dass $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, $T = 25$ Secunden, $p = 1$; werden diese Werthe in (11) eingesetzt, so folgt, nach der weitern Annahme, dass N gleich 500:

$$\mu = \pm \frac{1}{2.25.2},$$

mithin für die Anzahl von Schwingungen in 1 Secunde:

$$500 . \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2.25.2}$$

oder für die Zeit von 25 Secunden:

$$18750 \pm \frac{1}{4},$$

während die andere Gabel in dieser Zeit:

12500

Schwingungen vollendet.

2. Der vorausgehende Lehrsatz zeigt, wie die Schwingungscurven da benutzt werden können, wo es sich um geringe Tonhöhenunterschiede handelt. Er kann also eine sehr passende Anwendung da finden, wo man das Phänomen der Schwebungen genauer kennen lernen will; er kann angewandt werden da, wo es sich um die wechselseitige Einwirkung der Resonanz bei zwei tönenden Körpern handelt; er kann da sehr

passend angewandt werden, wo man Tonhöhenunterschiede kennen lernen will, hervorgebracht durch die Aenderung der Elongationsweite. Wird, in Beziehung auf den letzten Punkt, eine Gabel z. B. sehr stark erschüttert, so sind ihre Elongationsweiten gross, und die Gabel schwingt in Folge dessen etwas langsamer, als wenn man sie in schwache Erzitterungen versetzt. Man kann, falls eine zweite Gabel rechtwinklig neben der ersten aufgestellt wird, aus dem Anblicke der Schwingungscurve erkennen, wie die ursprünglich vorhandene Phasendifferenz nach und nach eine andere wird; man wird sogar im Stande sein, das etwaige Gesetz der Zunahme der Schwingungen mit der geringer werdenden Elongationsweite zu bestimmen.

3. Der genannte Satz gestattet aber, wie Lissajous gezeigt hat, auch noch eine andere sinnreiche Anwendung. Sind zwei Gabeln A und B annähernd dem Intervalle nach bekannt und kennt man ausserdem von einer, etwa von B, genau die Anzahl der Schwingungen, so kann letztere auch für die Gabel A gefunden werden, indem sie ja nach (12) gleich

$$N\frac{m}{n} \pm \frac{p}{2nT} \quad \ldots. (13)$$

ist. Hat man noch eine dritte Gabel C, welche mit B ein Verhältnis $\frac{m_{,}}{n_{,}}$ bildet, so ist nach demselben Satze die Anzahl der Schwingungen für C zu berechnen nach der Formel:

$$N.\frac{m_{,}}{n_{,}} \pm \frac{p_{,}}{2n_{,}T_{,}} \quad \ldots. (14)$$

Liegen nun aber A und C so nahe neben einander, dass sie Stösse geben, vielleicht p' in der Zeit T', so dass also der Unterschied ihrer Tonhöhen gleich:

$$\frac{p'}{T'}$$

ist, so leuchtet ein, dass auch die Gleichung

$$\left[N\frac{m}{n} \pm \frac{p}{2nT}\right] - \left[N\frac{m_{,}}{n_{,}} \pm \frac{p_{,}}{2n_{,}T_{,}}\right] = \frac{p'}{T'} \quad \ldots. (15)$$

bestehen muss, d. h.: ist die rechte Seite von (15) bekannt und auf der linken Seite $\frac{m}{n}$, $\frac{m_{,}}{n_{,}}$, ferner p und $p_{,}$, T und $T_{,}$, so lässt sich N berechnen.

Beispiel. Wir wollen nach LISSAJOUS annehmen, es wäre:

$$\frac{m}{n} = \frac{6}{7}; \quad \frac{m_{,}}{n_{,}} = \frac{5}{6}.$$

Nach (15) folgte dann:

$$N.\left(\frac{6}{7} - \frac{5}{6}\right) = \frac{p'}{T'} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{p_{,}}{n_{,}T_{,}} - \frac{p}{nT}\right)$$

oder

$$N = 42.\left[\frac{p'}{T'} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{p'}{n_{,}T_{,}} - \frac{p}{nT}\right)\right].$$

Durch die Beobachtung ergèben sich ferner bei dem Verhältnis $\frac{5}{6}$:

12 vereinfachte Curven in 41″,4
,, 43″,4

folglich im Mittel:

12 vereinfachte Curven in 42″,4

d. h. es ist:

$$p_{,} = 12; \quad T_{,} = 42'',4.$$

Ferner bei dem Verhältnis $\frac{6}{7}$:

30 vereinfachte Curven in 64″
,, 63″,2

folglich im Mittel:

30 vereinfachte Curven in 63″,6

d. h. es ist:

$$p = 30; \quad T = 63'',6.$$

Es ergeben sich ferner:

180 Stösse in: 1′—59″,2
,, 1′—59″,4

folglich:

180 Stösse in: 1′—59″,3

d. h. es ist:

$$p' = 180; \quad T' = 119'',3.$$

Da beide Verhältnisse $\frac{5}{6}$ und $\frac{6}{7}$ sich etwas zu tief finden, so ist in obiger Gleichung das — Zeichen zu wählen. Die Ausrechnung der rechten Seite von (15), nach Einsetzung der Zahlenwerthe, hat keine Schwierigkeit, nur würden wir ganze Schwingungen erhalten, während LISSAJOUS nach einer Formel

rechnete, die halbe Schwingungen lieferte. Um das Endresultat der LISSAJOUS'schen Beobachtung und Rechnung anzuführen, sei bemerkt, dass er drei Reihen von Beobachtungen anstellte:

Die erste ergab $N = 127{,}80$
,, zweite ,, ,, $= 128{,}45$
,, dritte ,, ,, $= 128{,}07$
Mithin das Mittel $N = 128{,}08$

halbe oder 64,04 ganze Schwingungen.

Eilftes Capitel.

Theorie der optisch-akustischen Wellenapparate in ihrem Zusammenhange mit den Schwingungscurven.

---

§. 33.

Allgemeine Bemerkungen.

1. Um das gehörige Verständnis gewisser Principien und einzelner Abschnitte in der Lehre des Lichts und Schalls zu erleichtern, haben sich mehrere Physiker das Verdienst erworben, Apparate zu construiren, durch deren Mechanismus die Bewegung eines schwingenden Körpers, namentlich die hypothetische Bewegung der Aethertheilchen oder wenigstens ein bestimmter Moment derselben dargestellt werden kann. Die Interferenzen zweier Licht- und Schallstrahlen, die Erscheinungen der Stösse und Combinationstöne, die Bewegungsformen einer schwingenden Saite, die Bewegung der Aethertheilchen im polarisirten Lichte, eine Reihe von Farbenerscheinungen: alles dies sind Gegenstände, deren Erläuterung durch die Wellenapparate der Herren Eisenlohr, Wheatstone, Plücker, Fessel, Lissajous, Schulze und Gerling in hohem Grade erleichtert wird.

Ich habe die Absicht, im Folgenden in theoretischer Form auf allgemeinere Vibrationserscheinungen aufmerksam zu machen, welche sich eben durch einen Mechanismus im Sinne der

genannten Apparate darstellen lassen, um hierdurch zu zeigen, wie die Erscheinungen, welche durch die genannten Apparate wirklich bis jetzt versinnlicht wurden, theilweise nur speciellere unter allgemeinern Erscheinungen sind, und obwohl in dieser Beziehung manche der im Folgenden gefundenen Resultate zunächst nur theoretisches Interesse haben, so schliessen sie die Hoffnung nicht aus, geeigneten Orts eine nützliche Anwendung zu ermöglichen.

2. Indem ich die äussere Einrichtung der genannten Wellenapparate als bekannt voraussetze, möchte ich sie doch im Allgemeinen vorläufig mit Rücksicht auf das, was sie leisten, classificiren.

Entweder kommt es darauf an, eine Bewegung in ihrem continuirlichen Verlaufe zu veranschaulichen, oder nur bestimmte Momente dieses Verlaufs zu fixiren. Letztere Aufgabe zu lösen, ist der Zweck der Apparate von Eisenlohr und Wheatstone, während die erstere Aufgabe durch die Apparate von Plücker, Fessel, Lissajous, Gerling und Schulze gelöst wird, wobei sich jedoch selbstverständig durch Einhalten der Bewegung auch bestimmte Momente fixiren lassen. Die genannten Apparate charakterisiren sich ferner danach, ob sie nur ebene oder nur räumliche oder beide Darstellungen gleichzeitig machen sollen. Nur ebene Darstellungen liefern die Apparate von Eisenlohr, Schulze und Lissajous; nur räumliche (mit gewisser Ausnahme) der Apparat von Wheatstone; ebene und räumliche die Apparate von Gerling und der Plücker–Fessel'sche.

Um die Theilchen eines schwingenden Körpers zu versinnlichen, werden bei allen Apparaten kleine auf Drähten sitzende Knöpfchen angewandt, und um die Drähte mit den Knöpfchen continuirlich zu bewegen oder, einem bestimmten Momente der Bewegung entsprechend, zu ordnen, dienen Wellenleisten, Wellenflächen und Schraubencylinder. Mit dem Namen »Wellenleiste« will ich ein nach der Sinuslinie ausgeschnittenes, schmales Bret, mit dem Namen »Wellenfläche« dagegen einen nach der Sinuslinie ausgeschnittenen breiten Klotz, wie bei dem Wheatstone'schen Apparat, bezeichnen. Die Benennung »Schraubencylinder« wird passenden Orts ihre Erläuterung finden.

§. 34.

Der EISENLOHR'sche Wellenapparat.

1. Herr Geheimerath EISENLOHR führt in seinem Lehrbuch der Physik*) einen Apparat an, welcher dazu dienen soll, die Combination zweier in dieselbe Ebene fallender Wellen zu einer ebenen Resultante zu veranschaulichen. Zu dem Ende ist eine Reihe von Drähten oben mit Knöpfchen versehen, und letztere schon in einer Sinuslinie geordnet, während die untern Enden aller Drähte in gleichem Niveau liegen. Schiebt man nun unter dieses System von Drähten noch eine Wellenleiste, so leuchtet ein, wie nunmehr die Knöpfchen sich in einer von den beiden Componenten verschiedenen Curve anordnen müssen. Die Erscheinungen, welche dieser Apparat versinnlicht, sind namentlich: die Interferenz zweier ebenen Wellen, die Schwebungen und Combinationstöne. Die Elongationsgrenzen sind für beide Wellen wohl meistens gleich angenommen. Sehen wir davon ab, bezeichnen wir die Schwingungszahl der ursprünglich vorhandenen Sinuslinie mit n, ihre Elongationsweite mit B; die Schwingungszahl bei der untergesetzten Wellenleiste mit m, ihre Elongationsgrenze mit A und rechnen wir der letzteren auch eine Phasendifferenz gleich d zu; bezeichnen wir ferner die Coordinaten der resultirenden Curve mit y, die Abscissen mit x, so stellen die Gleichungen:

$$y_1 = A \sin 2m\pi (x+d) \quad \dots\dots (1)$$

$$y_2 = B \sin 2n\pi x \quad \dots\dots (2)$$

die beiden Componenten und

$$y = A \,.\, \sin 2m\pi (x+d) + B \sin 2n\pi x \quad \dots\dots (3)$$

die Resultante vor.

2. Ein Blick auf die Gleichung (3) lehrt, dass sie identisch mit der Gleichung I_b §. 22. Denn wir brauchen ja nur bei ihr um diese Identität einzusehen, statt x unter dem Sinuszeichen ein t, statt d ein ϑ zu denken. Daraus folgt aber, dass die resultirenden Curven keine andere sind als die, welche auf Taf. VII dargestellt wurden; es folgt ferner, dass, wenn man die resultirenden Curven bei dem EISENLOHR'schen Apparat auf eine in der XY Ebene liegende mit der Y Axe par-

*) Achte Aufl. S. 198. Neunte Aufl. S. 212.

allele Gerade projicirt, man die Darstellungen erhält, welche Taf. VII unter den einzelnen Feldern erblickt werden; oder mit andern Worten, der EISENLOHR'sche Apparat kann auch zur Erläuterung derjenigen wirklich physischen Erscheinungen dienen, welche auftreten, wenn ein Punkt genöthigt ist, auf einer Geraden zweien Vibrationsbewegungen gleichzeitig zu gehorchen.

3. Nehmen wir, wie es häufig in optischer und akustischer Beziehung gestattet ist, $A=B$ und $m=n=1$ an, so stellt die Gleichung

$$y=A.\sin 2\pi(x+d)+A\sin 2\pi x \qquad \ldots. (4)$$

die resultirende Curve aus zwei gleichzeitig wirkenden, und nur durch die Phasendifferenz verschiedenen ebenen Wellencomponenten vor. Sollen sich letztere vollständig aufheben, so muss:

$$\sin 2\pi(x+d)=-\sin 2\pi x \qquad \ldots. (5)$$

$$2\pi(x+d)=\lambda\pi-(-1)^{\lambda}2\pi x$$

$$d=\frac{\lambda}{2}-x[(-1)^{\lambda}+1]$$

sein, oder, da der Factor am x gleich Null, d. h. λ ungerad anzunehmen ist,

$$d=\frac{2K+1}{2}$$

sein; d. h. die Phasendifferenz muss eine ungerade Anzahl halber Wellen betragen.

Sollen sich die beiden Componenten im Maximo verstärken, so muss die eine Componente in demselben Sinne wirken wie die andere, d. h. es muss:

$$\sin 2\pi(x+d)=+\sin 2\pi x$$

$$d=\frac{\lambda}{2}+x[(-1)^{\lambda}-1]$$

oder

$$d=\frac{2.K}{2}$$

sein; oder anders ausgedrückt: es muss die Phasendifferenz gleich einer geraden Anzahl halber Wellen sein.

4. Fragen wir ferner: Wann hat die auf der Länge $=1$ enstehende Resultante die Eigenschaft: dass sie beiderseits

von der Länge $=\frac{1}{2}$ symmetrisch liegt? so löst uns diese Frage offenbar die Benutzung der Gleichung:

$$y=A.\sin 2m\pi\left(\frac{1}{2}+x+d\right)+B.\sin 2n\pi\left(\frac{1}{2}+x\right)=$$

$$=A.\sin 2m\pi\left(\frac{1}{2}-x+d\right)+B.\sin 2n\pi\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

oder was hiermit identisch ist, die Benutzung der Gleichung:

$$2A.\cos 2m\pi\left(\frac{1}{2}+d\right)\sin 2m\pi x+$$
$$+2B\cos n\pi.\sin 2n\pi x=0. \qquad \ldots. (5)$$

Da aber diese Gleichung für jeden Werth von x bestehen soll, so muss

$$\cos 2m\pi\left(\frac{1}{2}+d\right)=0$$
$$\cos n\pi=0$$

sein. Letzteres ist der ganzen Zahl n wegen unmöglich und unsere Frage ist dahin zu beantworten: dass bei der Combination zweier ebenen Wellen für keinen einzigen Werth einer Phasendifferenz eine Resultante zum Vorschein kommt, welche symmetrisch beiderseits von der Länge $\frac{1}{2}$ läge. Ein Blick auf die Curven der Taf. VII wird dies bestätigen.

Fragen wir ferner, ob es nicht für einen andern Werth als $\frac{1}{2}$ möglich ist, einen Werth, welchen ich allgemein mit a bezeichnen will, so müsste statt der Gleichung (5) die Gleichung:

$$2A.\cos 2m\pi(a+d)\sin 2m\pi x+$$
$$+2B\cos 2na\pi.\sin 2n\pi x=0 \qquad \ldots. (6)$$

bestehen. Diese besteht aber, wenn

$$\cos 2na\pi=0 \qquad \ldots. (7)$$

und

$$\cos 2m\pi(a+d)=0. \qquad \ldots. (8)$$

Aus (7) folgt.

$$2na\pi=\frac{2\lambda+1}{2}\pi$$

oder:

$$a=\frac{2\lambda+1}{4n} \qquad \ldots. (9)$$

und wird dieser Werth in (8) eingeführt, so ergiebt sich der zugehörige Werth von d als

$$d = \frac{(2\varkappa+1)n - (2\lambda+1)m}{4mn} \qquad \ldots. (10)$$

d. h., wenn m und n ungerad, als

$$d = \frac{K}{2mn}, \qquad \ldots. (11)$$

wenn m gerad, n ungerad oder umgekehrt als:

$$d = \frac{2K+1}{4mn}. \qquad \ldots. (12)$$

Ein Blick auf die Curven der Taf. VII wird die Richtigkeit der Formeln (9) und (10) bestätigen.

Eine Ausnahme der zuletzt gegebenen Grundsätze bildet der extreme Fall, wo $m = n = 1$ und $A = B$ ist. In diesem Falle lehrt nämlich die Gleichung (6) bei aufmerksamer Betrachtung, dass für jeden Werth von a, falls nur $d = \frac{2K+1}{2}$, die Curve symmetrisch beiderseits der Länge $= a$ liegt. Denn dies ist der extreme Fall, in welchem zwei ebene Wellen in der Combination sich aufheben, d. h. eine gerade Linie bilden.

Fragen wir zuletzt noch, für welchen Werth von x und d besitzt die Curve die Eigenschaft, dass:

$$A \cdot \sin 2m\pi (a+x+d) + B \sin 2n\pi (a+x) =$$
$$= -A \cdot \sin 2m\pi (a-x+d) - B \sin 2n\pi (a-x) \qquad \ldots. (13)$$

ist, so lässt sich für diese Gleichung zunächst setzen:

$$2A \cdot \sin 2m\pi (a+d) \cdot \cos 2m\pi x +$$
$$+ 2B \cdot \sin 2na\pi \cdot \cos 2n\pi x = 0 \qquad \ldots. (14)$$

und diese besteht, wenn:

$$\sin 2na\pi = 0$$

d. h.

$$2na\pi = \lambda\pi$$

oder:

$$a = \frac{\lambda}{2n}. \qquad \ldots. (15)$$

Dieser Werth, in die weitere, zum Bestehen von (14) nöthige, Bedingungsgleichung:

$$\sin 2m\pi (a+d) = 0$$

eingeführt, liefert:

$$d = \frac{\varkappa n - \lambda m}{2mn} \qquad \ldots. (16)$$

oder wenn $\varkappa$ und λ gerad, für jeden Werth von m und n:

$$d = \frac{K}{mn}; \qquad \ldots. (17)$$

wenn $\varkappa$ gerad und λ ungerad, im ersten und dritten Fall (m und n ungerad, m ungerad und n gerad):

$$d = \frac{2K+1}{2mn}, \qquad \ldots. (18)$$

im zweiten:

$$d = \frac{K}{mn}, \qquad \ldots. (19)$$

wenn $\varkappa$ ungerad, λ gerad, im ersten und zweiten Falle wie bei (18), im dritten wie bei (19); wenn $\varkappa$ und λ ungerad, im ersten Falle wie bei (19), im zweiten und dritten wie bei (18).

Diese theoretischen Betrachtungen mit der weitern Benutzung dessen, was in §. 30, 1, 2, 3 über die Maxima und Minima der Curven auf der Taf. VII gelehrt wurde, werden hinreichen, um Fragen zu beantworten, welche sich zunächst an den Eisenlohr'schen Apparat knüpfen.

§. 35.

Der Wellenapparat von O. Schulze.

1. Herr O. Schulze, Orgelbauer in Paulinzelle, hat einen Apparat construirt und in Pogg. Ann. Bd. 100, S. 583 seinen Leistungen nach beschrieben, der deswegen erhöhtes Interesse in Anspruch nimmt, weil durch ihn auch stehende Wellen und Longitudinalwellen veranschaulicht werden können, und weil er genau und mit Leichtigkeit die Componenten neben der Resultante übersehen lässt. Denken wir uns bei bei dem Eisenlohr'schen Apparat beide Wellen in fortschreitender Bewegung entweder in demselben oder in entgegengesetztem Sinne: so ist es diese Idee, welche durch den Apparat von Schulze verwirklicht wurde. Zwei Wellenleisten werden progressiv verschoben, jede setzt an der vordern Seite des Apparats die Knöpfchen der Componenten in Bewegung, und durch einen sinnreichen, den Orgelbauer verrathenden, Mechanismus erzeugen diese beiden Componente eine Resultante, welche an der obern Seite des Apparats erblickt wird. Alle die Bewegungen, der Componenten wie der Resultante, sind ebene.

Versuchen wir es, die einfachsten Erscheinungen, welche sich nun hierbei zeigen, auf theoretischem Wege zu ermitteln.

2. Stellen wiederum

$$y_1 = A \,.\, \sin 2m\pi\,(x+d) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$y_2 = B \,.\, \sin 2n\pi x \quad \ldots\ldots (2)$$

die beiden Componenten vor, und werden diese Componenten progressiv bewegt, so können wir diese Bewegung analytisch dadurch anzeigen, dass wir dem x noch eine Variabele t_1 und t_2 hinzufügen, so dass nunmehr die Componenten wären:

$$y_1 = A \,.\, \sin 2m\pi\,(x+d \pm t_1)$$

$$y_2 = B \,.\, \sin 2n\pi\,(x \pm t_2).$$

Ist die Bewegung in beiden Componenten gleichförmig, so ist

$$t_1 = t_2 = t$$

anzunehmen; ist sie in der einen Componente, etwa y_2, gleich Null, so ist

$$t_2 = 0$$

$$t_1 = t$$

zu setzen. Geht die Bewegung in beiden Componenten nach derselben Seite, so sind bei t_1 und t_2 die gleichen Zeichen, geht sie in einer Componente umgekehrt wie in der andern, so sind bei t_1 und t_2 die entgegengesetzten Zeichen zu wählen.

Die resultirende Bewegung bei gleichförmiger Bewegung der Componenten wird dargestellt durch die Gleichung:

$$y = A \,.\, \sin 2m\pi\,(x+d \pm t) + B \sin 2n\pi\,(x \pm t) \quad \ldots\ldots (3)$$

und wir sind im Stande, in jedem Momente die Form der Curve zu erkennen, falls wir nur t, dem betreffenden Momente entsprechend, in die Gleichung (3) einführen, d. h. falls wir dem t einen constanten Werth beilegen. Gesetzt z. B., es wäre $d = \frac{1}{2m}$ und t irgend eine Contante $= \tau$, so folgt:

$$y = A \,.\, \sin 2m\pi \left(x + \frac{1}{2m} \pm \tau\right) + B \,.\, \sin 2n\pi\,(x \pm \tau)$$

oder wenn noch

$$A = B; \quad m = n = 1$$

angenommen wird:

$$y = A \,.\, \sin 2\pi \left(x + \frac{1}{2} \pm \tau\right) + A \,.\, \sin 2\pi\,(x \pm \tau)$$

d. h.

$$y = -A.\sin 2\pi(x \pm \tau) + A.\sin 2\pi(x \pm \tau)$$

oder

$$y = 0$$

d. h. unter den gemachten Voraussetzungen reducirt sich die resultirende Bewegung auf Null.

Bewegen wir aber die eine Componente in umgekehrter Richtung, so folgt in einem bestimmten Momente der Bewegung, für welchen $t = \tau$ ist, dass

$$y = A.\sin 2\pi\left(x + \frac{1}{2} \pm \tau\right) + A.\sin 2\pi(x \mp \tau)$$

und nunmehr ist die resultirende Bewegung nicht gleich Null, sondern gleich:

$$y = -A.\sin 2\pi(x \pm \tau) + A\sin 2\pi(x \mp \tau)$$

oder

$$y = \mp 2A.\cos 2\pi x.\sin 2\pi\tau. \qquad \ldots. (4)$$

Diese Gleichung zeigt aber offenbar eine stehende Wellenbewegung an, falls man sich nur statt τ wiederum t geschrieben denkt.

3. Bezeichnen wir mit x und y die Coordinaten einer ebenen Curve, mit t eine Zeitvariabele, mit M eine Schwingungszahl, mit ϑ eine Phasendifferenz, so stellt die Gleichung

$$y = F(x).\sin 2M\pi(t + \vartheta) \qquad \ldots. (5)$$

jede denkbare ebene stehende Wellenbewegung einer in den äussersten Grenzen nach der Curve $F(x)$ geordneten Punktreihe vor und zwar so, dass jeder Punkt hierbei einfache, in der Zeiteinheit sich Mmal wiederholende Schwingungen beiderseits der Ruhelage ausführt. Meiner, nun einmal angewandten, Bezeichnung nach will ich eine solche stehende Wellenbewegung eine ebene stehende Wellenbewegung erster Ordnung nennen. Jeder Ausdruck, welcher die Variabelen x und t enthält, und sich in zwei Factoren $F(x)$ und $\sin 2M\pi(t + \vartheta)$ zerlegen lässt, zeigt eine stehende Wellenbewegung der genannten Art an, im entgegengesetzten Falle dagegen nicht. Unsere Frage ist nun, unter welchen Voraussetzungen ist es möglich, dass zwei Componenten:

$$y_1 = A.\sin 2m\pi(x + d \pm t)$$
$$y_2 = B.\sin 2n\pi(x \pm t)$$

eine stehende Wellenbewegung erster Ordnung erzeugen? Offenbar wenn der Ausdruck:

$$y = A \, . \sin 2m\pi \, (x+d \pm t) + B \, . \sin 2n\pi \, (x \pm t) \quad \ldots . \; (6)$$

sich so umformen lässt, dass er die Form der rechten Seite von (5) annimmt. Wir wollen vorläufig nur eine Bewegung der Componenten in demselben Sinne voraussetzen und demgemäss nur die gleichen Zeichen am t berücksichtigen. Die rechte Seite von (6) kann auch geschrieben werden:

$$A \, . \sin 2m\pi \, (x+d) \, . \cos 2m\pi t \pm A \, . \cos 2m\pi \, (x+d) \, . \sin 2m\pi t + \\ + B \, . \sin 2n\pi x \, . \cos 2n\pi t \pm B \, . \cos 2n\pi x \, . \sin 2n\pi t \, . \quad \ldots . \; (7)$$

Da nun gemäss der Bedeutung von t keiner der Coëfficienten: $\cos 2m\pi t$, $\sin 2m\pi t$, $\cos 2n\pi t$, $\sin 2n\pi t$, bleibend gleich Null angenommen werden darf, so liesse sich die Summe der letzten vier Summanden nur dann auf die Form der rechten Seite von (5) überführen, wenn die vier genannten Coëfficienten alle einander gleich wären. Dies setzte aber auch eine Gleichheit von $\cos 2m\pi t$ und $\sin 2m\pi t$, sowie $\cos 2n\pi t$ und $\sin 2n\pi t$ voraus, was der Bedeutung von t nach unmöglich ist. Auch die Annahme, dass drei der genannten Coëfficienten einander gleich seien, ist unmöglich, und es bleiben so nach nur noch folgende Möglichkeiten im gedachten Sinne übrig: nämlich Erstens:

$$\cos 2m\pi t = \cos 2n\pi t \quad \ldots . \; (8)$$

und zugleich

$$\sin 2m\pi t = \sin 2n\pi t \, . \quad \ldots . \; (9)$$

Diese Gleichungen bestehen aber, der Bedeutung von t nach, nur, wenn

$$m = n$$

ist. Da wir in diesem Falle auch $m = n = 1$ setzen dürfen, so geht die Summe der vier Summanden in (7) über in:

$$\{A \, . \sin 2\pi \, (x+d) + B \sin 2\pi x\} \cos 2\pi t \pm \\ \pm \{A \, . \cos 2\pi \, (x+d) + B \cos 2\pi x\} \sin 2\pi t \quad \ldots . \; (10)$$

und dieser Ausdruck erreicht die Form von (5), wenn einer der Coëfficienten am $\cos 2\pi t$ oder $\sin 2\pi t$ gleich Null wird. Soll aber z. B.

$$A \, . \sin 2\pi \, (x+d) + B \, . \sin 2\pi x = 0 \quad \ldots . \; (11)$$

oder was hiermit identisch:

$$(A \, . \cos 2\pi d + B) \sin 2\pi x + A \sin 2\pi d \, . \cos 2\pi x = 0$$

werden, so ist dies nur möglich, wenn

$$\sin 2\pi d = 0 \quad \ldots\ldots (12)$$

und

$$A \cos 2\pi d + B = 0$$

oder:

$$\cos 2\pi d = -\frac{B}{A} \quad \ldots\ldots (13)$$

ist. Da gemäss (12) $\cos 2\pi d = \pm 1$ werden muss, so würde, da ferner gemäss (13) nur das — Zeichen genommen werden darf, zum Bestehen von (11) weiter erforderlich sein, dass

$$A = B$$

wäre. Der andere Coëfficient in (10), nämlich der Coëfficient an $\sin 2\pi t$, d. h.

$$A . \cos 2\pi (x + d) + A \cos 2\pi x$$

oder:

$$A . \{(\cos 2\pi d + 1) \cos 2\pi x - \sin 2\pi d . \sin 2\pi x\}$$

wird aber dann gemäss der Werthe $\sin 2\pi d = 0$ und $\cos 2\pi d = -1$ zu Null; er verschwindet also auch und die gewünschte Reduktion auf die Form der rechten Seite von (5) ist unter diesen Umständen nicht möglich. Setzten wir umgekehrt voraus, es wäre der Coëfficient an $\sin 2\pi t$ gleich Null, so würde auch der an $\cos 2\pi t$ gleich Null sich ergeben, und auch auf diese Weise ist die gewünschte Reduktion nicht zu erreichen.

Zweitens ist denkbar, dass in (10) die beiden Factoren an $\cos 2\pi t$ und $\sin 2\pi t$ einander gleich werden, so dass wir dann statt der rechten Seite der Gleichung (10) hätten:

$$F(x) (\cos 2\pi t + \sin 2\pi t),$$

oder, da die Summe von $\cos 2\pi t + \sin 2\pi t$ sich in einen Sinus verwandeln lässt, einen Ausdruck:

$$F(x) \sin 2M\pi (t + \vartheta),$$

wie wir ja haben wollten. Setzen wir nun aber:

$$A . \sin 2\pi (x + d) + B \sin 2\pi x =$$
$$= \pm A . \cos 2\pi (x + d) \pm B \cos 2\pi x,$$

so wird die Gleichung nur bestehen können, wenn:

$$\{A (\cos 2\pi d \pm \sin 2\pi d) + B\} \sin 2\pi x +$$
$$+ \{A (\sin 2\pi d \mp \cos 2\pi d \mp B\} \cos 2\pi x = 0.$$

ist. Der Bedeutung von x gemäss muss aber dann:

$$A . (\cos 2\pi d \pm \sin 2\pi d) + B = 0$$
$$A . (\sin 2\pi d \mp \cos 2\pi d) \mp B = 0$$

sein; oder wenn die obern Zeichen gelten:

$$2A \cdot \sin 2\pi d = 0$$
$$2A \cdot \cos 2\pi d = -2B$$

d. h.

$$\sin 2\pi d = 0$$
$$\cos 2\pi d = -1$$
$$A = B;$$

wenn die untern Zeichen gelten:

$$2A \cdot \cos 2\pi d = -2B$$
$$2A \cdot \sin 2\pi d = 0$$

d. h. ebenfalls wenn:

$$\sin 2\pi d = 0$$
$$\cos 2\pi d = -1$$
$$A = B.$$

Diese drei Werthe verwandeln aber, wie wir gesehen haben, die beiden Factoren an $\cos 2\pi t$ und $\sin 2\pi t$ in Null und die gewünschte Reduktion ist auch auf diesem zweiten allein noch denkbaren Wege nicht zu erreichen.

Alles dies zusammengefasst ergiebt sich als Resultat:

»Combinirt man zwei ebene Componenten

$$y_1 = A \cdot \sin 2m\pi (x+d \pm t)$$
$$y_2 = B \cdot \sin 2n\pi (x \pm t),$$

»so ist es bei einer Bewegung in gleichem Sinne unmöglich, »dass diese Componenten eine resultirende stehende Wel- »lenbewegung erster Ordnung erzeugen.«

Wir wollen zusehen, ob die Möglichkeit vielleicht vorhanden, wenn wir umgekehrte Zeichen wählen. Die rechte Seite von (6) kann jetzt geschrieben werden:

$$A \cdot \sin 2m\pi (x+d) \cos 2m\pi t \pm A \cdot \cos 2m\pi (x+d) \sin 2m\pi t +$$
$$+ B \cdot \sin 2n\pi x \cdot \cos 2n\pi t \mp B \cdot \cos 2n\pi x \cdot \sin 2n\pi t.$$

Da wiederum eine Reduktion auf die Form $F(x) \sin 2M\pi (t+\vartheta)$ nur denkbar ist, wenn $\cos 2m\pi t = \cos 2n\pi t$ d. h. $m=n=1$, so würde dieser Voraussetzung gemäss statt der vier Summanden geschrieben werden können:

$$\{A \cdot \sin 2\pi (x+d) + B \cdot \sin 2\pi x\} \cos 2\pi t$$
$$\pm \{A \cos 2\pi (x+d) - B \cos 2\pi x\} \sin 2\pi t. \quad \ldots. \quad (14)$$

Der Coëfficient am $\cos 2\pi t$ wird aber zu Null, wenn:

$$\sin 2\pi d = 0$$
$$\cos 2\pi d = -1$$
$$A = B.$$

Unter diesen Annahmen wird der Coëfficient am $\sin 2\pi t$ in (14) nämlich:

$$\pm A\{\cos 2\pi(x+d) - \cos 2\pi x\}$$

gleich:

$$\pm A\{-\cos 2\pi x - \cos 2\pi x\}$$
$$= \mp 2A.\cos 2\pi x$$

und da der Ausdruck $\mp 2A.\cos 2\pi x$ als ein $F(x)$ angesehen werden kann, so folgt, dass unter den gemachten Voraussetzungen, aber auch nur unter den gemachten Voraussetzungen eine stehende Wellenbewegung zum Vorschein kommt. Soll nun

$$\sin 2\pi d = 0$$
$$\cos 2\pi d = -1$$

sein, so muss

$$2\pi d = (2\lambda+1)\pi$$

d. h.

$$d = \frac{2\lambda+1}{2} \qquad \ldots. (15)$$

sein, und unser gefundenes Resultat nun:

»Eine stehende Wellenbewegung erster Ordnung bei dem »Zusammenwirken zweier Componenten

$$y_1 = A.\sin 2m\pi(x+d\pm t)$$
$$y_2 = B.\sin 2n\pi(x\pm t)$$

»ist nur möglich, wenn:

$$A = B$$
$$m = n = 1$$
$$d = \frac{2\lambda+1}{2}$$

»und ausserdem die Bewegung der einen Componente die »umgekehrte ist wie bei der andern. Die stehende Bewegung »ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$y = \mp 2A.\cos 2\pi x.\sin 2\pi t$$

»oder auch für das obere Zeichen durch:

$$y = 2A \,.\, \sin 2\pi \left(x + \frac{4\lambda+3}{2} \right) . \sin 2\pi t \,,$$

»sowie für das untere Zeichen durch:

$$y = 2A \,.\, \sin 2\pi \left(x + \frac{4\lambda+1}{2} \right) . \sin 2\pi t \,.«$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit der Gleichung (5):

$$y = F(x) \,.\, \sin 2M\pi \, (t+\vartheta) \,,$$

so müsste

$$2A \,.\, \sin 2\pi \left(x + \frac{4\lambda+3}{2} \right)$$

oder

$$2A \,.\, \sin 2\pi \left(x + \frac{4\lambda+1}{2} \right)$$

als $F(x)$ und $\sin 2\pi t$ als $\sin 2M\pi \, (t+\vartheta)$ angesehen, mithin:

$$M = 1$$

und

$$\vartheta = \varkappa$$

d. h. gleich einer ganzen Zahl gewählt werden.

4. Wir wollen eine weitere Frage lösen, nämlich welche Wellenformen entstehen bei der Zusammenwirkung zweier Componenten, von denen die eine in Ruhe, die andere in Bewegung ist, oder kurz etwa der Componenten:

$$y_1 = A \,.\, \sin 2m\pi \, (x+d \pm t) \quad \ldots. \; (16)$$

$$y_2 = B \,.\, \sin 2n\pi x \,. \quad \ldots. \; (17)$$

Die resultirende Bewegung wird dargestellt durch die Gleichung:

$$y = A \,.\, \sin 2m\pi \, (x+d \pm t) + B \,.\, \sin 2n\pi x \,. \quad \ldots. \; (18)$$

Soll diese Bewegung eine stehende erster Ordnung sein, so muss sich die rechte Seite, oder was hiermit einerlei ist:

$$\left.\begin{array}{c} A \,.\, \sin 2m\pi \, (x+d) \,.\, \cos 2m\pi t \pm \\ \pm A \,.\, \cos 2m\pi \, (x+d) \,.\, \sin 2m\pi t + \\ + B \sin 2n\pi x \end{array}\right\} \quad \ldots. \; (19)$$

in eine Form

$$F(x) \sin 2M\pi \, (t+\vartheta)$$

bringen lassen. Der einzig vielleicht denkbare Weg zur Erreichung dieses Ziels wäre:

$$m = n = 1 \,,$$

anzunehmen, wodurch (19) übergeht in:

$$A \,.\, \sin 2\pi\,(x+d) \cos 2\pi t \pm$$
$$\pm A \,.\, \cos 2\pi\,(x+d) \sin 2\pi t$$
$$+ B \,.\, \sin 2\pi x \,.$$

Diese drei Summanden lassen sich aber nicht auf eine Form

$$F(x) \sin 2M\pi\,(t+\vartheta)$$

zurückführen, wie man sofort einsieht, wenn man die Bedeutung von x und t gehörig ins Auge fasst.

Unser Resultat heisst somit:

»Ist eine ebene Welle in Ruhe, während die andere sich »gleichmässig fortbewegt, so können unter keinen Um»ständen stehende Wellen erster Ordnung zum Vorschein »kommen.«

5. Das Vorausgehende hat gezeigt, dass man mit Hilfe des Schulze'schen Apparats die Curven der Taf. VII und zwar, da sich bei dem Verschieben der Wellenleiste die Grösse t, mithin $d+t$, mithin die Phasendifferenz continuirlich ändert, in ihren continuirlichen Uebergängen verfolgen kann, während bei dem Eisenlohr'schen Apparat nur bestimmte Momente der Bewegung sich fixiren liessen. Projicirt man in Gedanken die Curven auf eine in der XY Ebene und mit Y parallel laufende Gerade, so hat man ein Bild von dem Vorgange, wie er bei zweien in eine Gerade fallenden Vibrationsbewegungen mit continuirlich sich ändernder Phasendifferenz stattfindet.

Ersetzt man eine der einfachen Wellenleisten durch eine zusammengesetzte (eine Wellenleiste zweiter Ordnung), so kann man Wellencurven dritter Ordnung darstellen; combinirt man zwei Wellenleisten zweiter Ordnung, so ist die Resultante eine Sinuslinie vierter Ordnung. In allen Fällen gestattet der Apparat bei beiden Componenten gleiche oder entgegengesetzte Bewegung, Ruhe in der einen und Bewegung in der andern, kurz eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit von Bewegungen.

§. 36.

Der Apparat von Wheatstone.*)

1. Der Wheatstone'sche Apparat soll zwei unter einem rechten Winkel gegen einander geneigte ebene Wellen in ihrer

*) Eisenlohr's Lehrb. d. Physik. 9te Aufl. S. 314.

Combination zeigen. Zu dem Ende wird ein, schon in einer Sinusfläche geordnetes, System gleich langer Drähte senkrecht auf eine Wellenfläche gesetzt. In dem Apparate, wie er bei physikalischen Erläuterungen benutzt wird, sind beide Wellenflächen ganz gleich. Sehen wir hiervon ab, so ist die Theorie sämmtlicher Erscheinungen, welche sich durch einen solchen Mechanismus darstellen lassen, gegeben in den Gleichungen der beiden Componenten, nämlich:

$$x = A \,.\, \sin 2m\pi\,(z+d) \qquad \ldots.\ (1)$$

$$y = B \,.\, \sin 2n\pi z\,. \qquad \ldots.\ (2)$$

Denken wir statt z ein t, statt d ein ϑ gesetzt, so leuchtet ein, dass die Gleichungen (1) und (2) ganz identisch sind mit den Gleichungen I_a. Sieht man also in der Richtung der z Axe die Resultante bei einem, unserer Verallgemeinerung entprechenden, Wheatstone'schen Apparate an, so bietet sich dem Auge eine Curve der Taf. VI dar, welche man willkürlich durch Versetzung der einen Wellenfläche ändern kann.

2. Nimmt man $m = n = 1$; $A = B$ an, wie es zur Erläuterung des Zusammenwirkens ganz gleicher Wellen erforderlich ist, so gehen unsere Gleichungen (1) und (2) über in

$$x = A \,.\, \sin 2\pi\,(z+d) \qquad \ldots.\ (3)$$

$$y = A \,.\, \sin 2\pi z\,. \qquad \ldots.\ (4)$$

Setzt man ferner aus (4)

$$\sin 2\pi z = \frac{y}{A},$$

mithin

$$\cos 2\pi z = \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}}$$

in (3) ein, so folgt:

$$x = A \,.\, \left\{ \cos 2\pi d \,.\, \frac{y}{A} \pm \sin 2\pi d \,.\, \frac{1}{A} \,.\, \sqrt{A^2 - y^2} \right\}, \qquad \ldots.\ (5)$$

welche Gleichung je nach dem Werthe von d sich mehr oder weniger vereinfacht. Im Allgemeinen gehört sie einer Ellipse oder, wenn man will, einem elliptischem Cylinder an, der unter der Voraussetzung, dass

$$\cos 2\pi d = 0$$

mithin

$$\sin 2\pi d = \pm 1$$

ist, in einen kreisförmigen Cylinder mit dem Radius A, so wie unter der Voraussetzung

$$\sin 2\pi d = 0\,;\quad \cos 2\pi d = \pm 1$$

in eine unter $\pm 45^0$ gegen die XZ Ebene geneigte Ebene übergeht.

3. Im Uebrigen knüpfen sich an den Wheatstone'schen Apparat nicht leicht Fragen, welche wir nicht schon bei der Behandlung der Curven auf Taf. VI erledigt hätten.

Es versteht sich von selbst, dass man das, im Apparat zur Anwendung gekommene, Princip noch verallgemeinern könnte. Denn ohne Zweifel könnte man auch eine Wellenfläche »erster« mit einer Wellenfläche »zweiter« Ordnung combiniren, oder zwei Wellenflächen zweiter Ordnung, und man würde auf diese Weise als Resultante eine Curve erhalten, deren Projection in der XY Ebene den Anblick einer Schwingungscurve darböte, welche letztere je nach der geeigneten speciellen Wahl der Wellenflächen der Taf. VIII bis X oder der Taf. XI angehörte.

§. 37.

Der Plücker-Fessel'sche Apparat. *)

1. Das Princip, welches dem Wheatstone'schen Apparate zu Grunde liegt, hat in dem einen Theile des Plücker–Fessel'schen eine Erweiterung dadurch erhalten, dass man bei letzterem im Stande ist, die Wellenflächen zu verschieben, jedoch nur beide in einem Sinne, um so eine continuirliche Bewegung herauszubringen. Setzen wir nicht gleiche, sondern beliebige, zunächst jedoch Wellen erster Ordnung voraus, so liegt die Theorie eines solchen vervollkommneten Apparats in den Gleichungen:

$$x = A \,.\, \sin 2m\pi\,(z + d \pm t) \qquad \ldots.\ (1)$$

$$y = B \,.\, \sin 2n\pi\,(z \pm t)\,, \qquad \ldots.\ (2)$$

worin t als eine neben z bestehende Variabele, in (1) und (2) sowohl mit gleichem als mit entgegengesetztem Vorzeichen gewählt werden kann, je nachdem man in beiden Systemen eine gleiche oder entgegengesetzte Bewegung der beiden Wellenflächen annimmt.

2. Zwei Möglichkeiten sind nun zunächst mit Rücksicht

*) Pogg. Ann. Bd. 78. (1849.) S. 421.

auf die Gleichungen (1) und (2) vorhanden, nämlich die Elimination von z und die Elimination von t. Eliminiren wir z, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen x, y und t etwa:

$$\Phi\,(x,\,y,\,t) = 0 \qquad \ldots.\ (3)$$

eine Gleichung, welche eine bestimmte ebene Curve

$$\varphi\,(x,\,y) = 0 \qquad \ldots.\ (4)$$

liefert, falls wir nur dem t einen constanten Werth τ beilegen. Eliminiren wir t, so ergiebt sich eine Gleichung:

$$\Psi\,(x,\,y,\,z) = 0 \qquad \ldots.\ (5)$$

als Gleichung einer Fläche, nämlich derjenigen Fläche, auf welcher die Bewegung der Knopfreihe zu denken ist.

3. Um zunächst t zu eliminiren, und so zur Gleichung (5) zu gelangen, beachten wir, dass nach (1) und (2):

$$\pm t = \frac{1}{2m\pi} \arcsin \frac{x}{A} - z - d \qquad \ldots.\ (6)$$

$$\pm t = \frac{1}{2n\pi} \arcsin \frac{y}{B} - z\,. \qquad \ldots.\ (7)$$

Gelten die gleichen Zeichen, so eliminirt sich t durch Subtraction, gelten die ungleichen Zeichen, so verschwindet es bei der Addition der beiden letzten Gleichungen. Im ersten Falle erhalten wir:

$$\frac{1}{2m\pi} \arcsin \frac{x}{A} - \frac{1}{2n\pi} \arcsin \frac{y}{B} = d\,. \qquad \ldots.\ (8)$$

Wir sehen somit, dass bei der Elimination von t auch z weggefallen ist, woraus folgt:

»dass, wenn die Componenten in demselben Sinne bewegt »werden, man als Fläche (5) eine Cylinderfläche erhält.«

Im zweiten Falle erhalten wir:

$$\frac{1}{2m\pi} \arcsin \frac{x}{A} + \frac{1}{2n\pi} \arcsin \frac{y}{B} = 2z + d\,, \qquad \ldots.\ (9)$$

welche Gleichung offenbar einer ganz anderen Fläche als der, durch die Gleichung (8) bezeichneten, angehört. Denken wir in (8) statt d ein ϑ geschrieben, so wird die Gleichung vollständig identisch mit der Gleichung für die Curven auf Taf. VI, d. h. mit andern Worten:

»Die Basis der Cylinderfläche (8) wird gebildet von den »Curven der Taf. VI.« –

Setzen wir in der Gleichung (9)

$$2z+d=\vartheta$$

d. h.

$$z=\frac{\vartheta-d}{2}, \qquad \ldots. (10)$$

so fragt es sich, ob auch die Fläche (9) in einer gewissen Beziehung zu den Curven der Taf. VI steht?

Ich will die beiden Flächen (8) und (9) für den einfachsten Fall, in welchem

$$m=n=1$$

ist, etwas genauer betrachten.

Die erstere lässt sich mit Rücksicht auf vorstehende Annahme auch schreiben als:

$$y=B.\sin\left\{\arcsin\frac{x}{A}-2\pi d\right\}$$

oder:

$$y=B\left\{\frac{x}{A}.\cos 2\pi d-\frac{1}{A}\sqrt{A^2-x^2}.\sin 2\pi d\right\}. \ldots. (11)$$

Ist nun 1°:

$$\sin 2\pi d=0,\text{ d. h.}$$
$$2\pi d=\lambda\pi$$
$$d=\frac{\lambda}{2},$$

so ergiebt sich:

$$\cos 2\pi d=(-1)^{\lambda}$$

mithin:

$$y=(-1)^{\lambda}\frac{B}{A}.x \qquad \ldots. (12)$$

d. h. die Fläche ist eine Ebene, welche durch die Z Axe läuft, und mit der XZ Ebene einen Winkel τ bildet, so dass $\operatorname{tang}\tau=(-1)^{\lambda}\frac{B}{A}$, also bald einen positiven, bald einen negativen Winkel τ, je nachdem λ gerad oder ungerad ist.

Ist 2°

$$\cos 2\pi d=0,\text{ d. h.}$$
$$2\pi d=\frac{2\lambda+1}{2}\pi$$
$$d=\frac{2\lambda+1}{4},$$

so ergiebt sich:

$$\sin 2\pi d=(-1)^{\lambda},$$

mithin λ mag beschaffen sein wie es will:

$$y = \pm \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - x^2}. \qquad \ldots. (13)$$

Diese letztere Gleichung zeigt aber einen elliptischen Cylinder an, dessen Axen der Basis mit den Coordinatenaxen X und Y zusammenfallen. Würde

3⁰ weder sin $2\pi d$ noch cos $2\pi d$ gleich Null angenommen, so würden wir zwar noch elliptische Cylinder, aber mit anders gelegenen Axen der Basis erhalten. Man denke nur statt d ein ϑ gesetzt und nehme die Taf. VI zur Hand, so wird man in den verschiedenen Curven der ersten Horizontalreihe die, den verschiedenen Werthen von ϑ entsprechenden, Basen der Cylinderfläche (8) erblicken.

Die Gleichung (9) kann mit Rücksicht darauf, dass $m = n = 1$, auch geschrieben werden:

$$y = B \sin \left\{ 2\pi (2z + d) - \text{arc} \sin \frac{x}{A} \right\}$$

oder:

$$y = -B \sin \left\{ \text{arc} \sin \frac{x}{A} - 2\pi (2z + d) \right\}$$

oder, wenn wir beispielshalber $d = 0$ setzen:

$$y = -B \sin \left\{ \text{arc} \sin \frac{x}{A} - 2 . 2\pi z \right\}. \qquad \ldots. (14)$$

Bei dieser Fläche ändern sich die Schnitte, je nachdem man dem z verschiedene Werthe beilegt. Wird z. B.:

1⁰ $\sin 2.2\pi z = 0$, d. h.

$$2.2\pi z = \lambda\pi$$

$$z = \frac{\lambda}{4}$$

gesetzt, so folgt:

$$y = (-1)^{\lambda+1} \frac{B}{A} x,$$

d. h. wenn λ gerad:

$$y = -\frac{B}{A} . x,$$

wenn λ ungerad:

$$y = +\frac{B}{A} . x,$$

d. h. für die Werthe $z = \frac{\lambda}{4}$ liefert die Fläche als Schnittcurven gerade Linien. Wird

2^0 $$\cos 2.2.\pi z = 0, \text{ d. h.}$$
$$2.2.\pi z = \frac{2\lambda+1}{2}\pi$$
$$z = \frac{2\lambda+1}{8}$$
angenommen, so folgt:
$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{A^2-x^2}$$
d. h. für die Werthe $z = \frac{2\lambda+1}{8}$ erhält man Ellipsen, deren Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Lassen wir

3^0. weder $\cos 2.2\pi z$ noch $\sin 2.2\pi z$ gleich Null werden, so erhalten wir zwar auch Ellipsen, aber solche, deren Axen schief liegen. Diese eigenthümliche Fläche (9) liefert also für $m=n=1$ an jeder Schnittstelle offenbar auch eine Curve aus der ersten Horizontalreihe der Taf. VI, jedoch nicht, wie es bei der Fläche (8) der Fall war, überall dieselbe, sondern eine, nach einem leicht zu findenden Gesetze, mit z sich ändernde Curve.

Nimmt man noch $A=B$ an, so gehen an den Stellen, wo Ellipsen entstanden, deren Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfielen, diese Ellipsen in Kreise über.

4. Wir wollen nunmehr die Variabele z aus den beiden Gleichungen (6) und (7) eliminiren. Durch Subtraction ergiebt sich, wenn die gleichen Zeichen am t genommen werden:
$$\frac{1}{2m\pi}\arcsin\frac{x}{A} - \frac{1}{2n\pi}\arcsin\frac{y}{B} = d, \quad \ldots . (15)$$
wenn die ungleichen genommen werden:
$$\frac{1}{2m\pi}\arcsin\frac{x}{A} - \frac{1}{2n\pi}\arcsin\frac{y}{B} = \pm 2t + d \quad \ldots . (16)$$
und diese Gleichungen bedeuten das, was wir in (3) mit $\Phi\,(x, y, t)$ bezeichnet haben, also die Gleichung von der Projection unserer resultirenden räumlichen Curve in der XY Ebene, oder die Curve, in welcher die Reihe der Knöpfchen erblickt wird, wenn man in der Richtung der Z Axe nach dem Apparate hinsieht.

Die Gleichung (15) enthält kein t, woraus folgt, dass wäh-

rend der ganzen Verschiebung ein und dieselbe Curve und zwar je nach dem Werthe von d eine andere erblickt wird.

Die Gleichung (16) deutet an, dass die Curven bei der Verschiebung sich fortwährend ändern und da t ein doppeltes Vorzeichen erhalten hat, so wird es auch nicht einerlei sein, ob man die erste Componente, um kurz zu reden, nach vorn, die zweite nach hinten, oder umgekehrt: die erste nach hinten und die zweite nach vorn schiebt.

5. Ich will noch den Fall allgemeiner behandeln, wobei vorausgesetzt wird, dass eine der beiden beliebigen Wellen in Ruhe wäre. Die Gleichungen der Componenten sind in diesem Falle:

$$x = A . \sin 2m\pi\,(z + d \pm t)$$
$$y = B . \sin 2n\pi z.$$

Diese Gleichungen gestatten zwar eine Elimination von z, aber nicht auch gleichzeitig von t, und sind in Folge dessen auch wesentlich von den Gleichungen (1) und (2) verschieden. Der Umstand, dass die zweite kein t enthält, zeigt an, dass die Fläche, worauf die räumliche Curve sich bewegt, mit der Verschiebung fortwährend dieselbe bleibt. Die Elimination von z ist einfach, denn es ergiebt sich:

$$\frac{1}{2m\pi} \text{ arc sin } \frac{x}{A} = z + d \pm t$$
$$\frac{1}{2n\pi} \text{ arc sin } \frac{y}{B} = z,$$

mithin:

$$\frac{1}{2m\pi} \text{ arc sin } \frac{x}{A} - \frac{1}{2n\pi} \text{ arc sin } \frac{y}{B} = d \pm t. \quad .... (17)$$

Diese Gleichung gehört der Projection der räumlichen Resultante in der XY Ebene an und zeigt, wie diese Projection von t abhängig ist. Sie zeigt aber auch, dass in jedem Momente der Verschiebung diese Projection eine, der Tafel VI angehörige, Curve bildet, da ja $d \pm t$ für einen Moment immer als ein ϑ angesehen werden darf, und somit die Gleichung (17) vollständig identisch wird mit der Gleichung für die Curven der Taf. VI.

6. Es unterliegt keinem Zweifel, dass wir statt zweier Wellenflächen erster Ordnung auch zusammengesetzte oder Wellenflächen zweiter Ordnung anwenden könnten. Die Erscheinungen werden dann viel mannigfaltiger, als wir sie bis

jetzt kennen lernten, jedoch wird man ohne Schwierigkeit erkennen, dass statt der Curven auf Taf. VI jetzt andere Curven in genauem Zusammenhange mit den durch den Apparat gelieferten Erscheinungen stehen, dass, wenn man die Wellenflächen den Gleichungen II und III gemäss ausschneidet, dann speciell die Curven auf Taf. VIII bis X und Taf. XI eine Rolle spielen werden. Die theoretische Betrachtung dieses Gegenstandes hat keine Schwierigkeiten, da sich ganz die im Vorhergehenden bezeichneten Wege einschlagen lassen, um diese oder jene specielle Frage zu beantworten.

§. 38.

Der Apparat von Gerling.*)

1. Bei den im Vorhergehenden betrachteten Apparaten wurden, um eine Bewegung zu erzielen, Wellenleisten und Wellenflächen benutzt und diese progressiv verschoben. Es folgt daraus, dass die Bewegung nur bis zu einer gewissen Grenze fortgesetzt werden kann, bei welcher angelangt, man die Bewegung erst wieder rückwärts machen muss, um sie dann von Neuem zu beginnen. Diesem Uebelstande wird abgeholfen durch sogenannte Schraubencylinder, welche eine Rotations- statt einer Progressivbewegung machen, und so in continuirlicher Weise die Bewegung unterhalten.

Ein Vortheil geht jedoch bei ihrer Anwendung unter Umständen wieder verloren, nämlich die leichtere Einsicht in den Vorgang der ganzen Sache. Denn: wie eine Wellenleiste oder eine Wellenfläche wirkt, wird wohl von Jedem leicht begriffen, während die Einsicht in die Wirkungsweise eines Schraubencylinders genauere geometrische Betrachtungen voraussetzt.

2. Es giebt eine grosse Gattung von Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass sie, parallel einer bestimmten Ebene durchschnitten, als Durchschnittsfigur einen Kegelschnitt liefern, eine Gattung, welcher ich vor mehreren Jahren Aufmerksamkeit zugewandt habe, indem ich die allgemeine Theorie derselben in meiner Doctor-Dissertation behandelte**).

*) Pogg. Ann. Bd. 105. (1858.)

**) »Ueber einige krumme Flächen, welche von Ebenen, parallel einer bestimmten Ebene, durchschnitten, als Durchschnittsfigur einen Kegelschnitt liefern.« Marburg bei Joh. Aug. Koch. 1859.

Aus dieser grossen Gattung von Flächen lassen sich zwei Abtheilungen absondern. Die erste ist so beschaffen, dass alle Schnittcurven congruent sind, die zweite so, dass dies nicht der Fall ist, während doch sämmtliche Schnittcurven derselben Art, also nur Kreise, oder nur Ellipsen u. s. f. bleiben. In die erste Abtheilung gehören z. B.: der gerade und schiefe, kreisförmige, elliptische, parabolische und hyperbolische Cylinder; dann der kreisförmige, elliptische, parabolische und hyperbolische Schraubencylinder, in Betreff welcher letzern Flächen ich speciell auf die eben berührte Abhandlung von mir hinweisen muss. In die zweite Abtheilung gehören z. B. der gerade und schiefe, kreisförmige und elliptische Kegel; dann der kreisförmige Schraubenkegel, eine Fläche, welche sich nicht selten in der Natur findet. Wir haben es hier nur zu thun mit dem kreisförmigen Schraubencylinder. Er entsteht, wenn ein Kreis parallel mit sich selbst so fortbewegt wird, dass sein Mittelpunkt hierbei eine Schraubenlinie beschreibt. Je nachdem nun letztere wieder um einen kreisförmigen oder elliptischen Cylinder sich windet, wird auch der Schraubencylinder einen andern Charakter annehmen. Für unsern Zweck setzen wir eine gewöhnliche kreisförmige Schraubenlinie voraus. Nennen wir den Radius des Cylinders, um welchen die Schraubenlinie gelegt zu denken ist, r, den Radius des sich bewegenden Kreises R, bezeichnen wir ferner die Höhe des Cylinders als 1, und die Anzahl von Schraubengängen, welche auf diese Länge gehen, mit m, endlich die Axe des Cylinders, um welchen die Schraubenlinie zunächst herumgelegt zu denken ist, als Z Axe, so ist es leicht, die Gleichung für den Schraubencylinder zu finden, falls wir nämlich noch weiter voraussetzen, der ihn beschreibende Kreis möge sich parallel der XY Ebene bewegen. Die Gleichung eines Kreises, der beliebig parallel der XY Ebene liegt, ist, wenn α und β die Coordinaten seines Mittelpunkts bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2&=R^2\\ z&=\text{beliebig}\end{aligned}\right\} \quad \ldots. (1)$$

und soll der Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie liegen, so müssen α und β dem entsprechend bestimmt werden. Die

Gleichungen der Schraubenlinie sind aber, wenn x_0 und y_0 ihre Coordinaten bedeuten,

$$x_0 = r \,.\, \sin 2m\pi z \qquad \ldots . \; (2)$$

$$y_0 = r \,.\, \cos 2m\pi z \qquad \ldots . \; (3)$$

und da offenbar $\alpha = x_0$ und $\beta = y_0$ sein muss, so ergiebt sich:

$$(x - r \,.\, \sin 2m\pi z)^2 + (y - r \,.\, \cos 2m\pi z)^2 = R^2 \qquad \ldots . \; (4)$$

als gesuchte Gleichung unseres Schraubencylinders. Denken wir die Schraubenlinie um den Cylinder herumgedreht oder auch den Cylinder mit ihr, und zwar um einen Winkel w, so ist es leicht für sie, jetzt die veränderten Gleichungen statt (2) und (3) zu finden, um hieraus dann ebenso leicht die Gleichung für den um den Winkel w aus der Ruhelage gedrehten Schraubencylinder zu erhalten. Setzen wir in den Gleichungen (2) und (3) statt

$$x_0 \text{ ein } x_0 \cos w - y_0 \sin w$$

statt

$$y_0 \text{ ein } x_0 \sin w + y_0 \cos w \,,$$

so ergiebt sich zunächst:

$$x_0 \cos w - y_0 \sin w = r \sin 2m\pi z$$

$$x_0 \sin w + y_0 \cos w = r \cos 2\pi\pi z$$

und hieraus:

$$x_0 = r \sin (2m\pi z + w) \qquad \ldots . \; (5)$$

$$y_0 = r \cos (2m\pi z + w) \qquad \ldots . \; (6)$$

als die für (2) und (3) zu setzenden Gleichungen. Daraus folgt aber als Gleichung für den gedrehten Schraubencylinder:

$$[x - r \,.\, \sin (2m\pi z + w)]^2 + [y - r \cos (2m\pi z + w)]^2 = R^2 . \qquad \ldots . \; (7)$$

Legen wir dem w einen constanten Werth von W bei, und beginnen von diesem Momente an eine continuirliche Drehung, so ist statt der Gleichung (7) offenbar

$$[x - r \sin (2m\pi z + W + w)]^2 +$$
$$+ [y - r \cos (2m\pi z + W + w)]^2 = R^2 \qquad \ldots . \; (8)$$

zu setzen, so dass also W eine Constante und w neben x, y und z eine Variabele bedeutet.

3. Wir wollen eine erste Aufgabe lösen, nämlich: »welche Fläche entsteht, wenn eine Gerade parallel der XY »Ebene und parallel mit sich selbst so bewegt wird, dass sie »ausserdem auch noch die Fläche (8) berührt?«

Auflösung. Die Gleichungen einer solchen Geraden sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= x \,.\, \operatorname{tang} \tau + b \\ z &= \text{beliebig} \end{aligned}\right\}, \qquad \ldots . \; (9)$$

vorausgesetzt, dass die Constanten τ und b der Aufgabe gemäss bestimmt werden. Ihr zu Folge aber kann sich τ nicht ändern und nur b ist noch gehörig zu bestimmen. Bevor wir jedoch weitere Schlüsse machen, wollen wir einen Blick auf die Fig. 57, Taf. IV werfen und zunächst nur die rechte Seite dieser Figur beachten. Wir erblicken hier einen kleinern Kreis mit dem Mittelpunkt C und einen grössern mit dem Mittelpunkt M; ferner eine an den grossen Kreis gelegte Tangente TB. Die Z Axe unseres angenommenen Coordinatenkreuzes erscheint in C zu einem Punkte verkürzt; die Gerade CH stellt die X Axe und eine hierzu senkrecht und durch C laufende Gerade die Y Axe vor. Die Gleichung (9) gehört demnach der Geraden TB an; τ ist der Winkel, welchen TB mit CH bildet, ferner b das Stück, welches TB auf der Y Axe von C aus gerechnet bei gehöriger Verlängerung abschneiden würde. Läge der Coordinatenmittelpunkt in M, liefe die X und Y Axe durch M mit den durch C laufenden und soeben als X und Y bezeichneten Axen parallel, und bezögen wir die Gerade (9) auf das neu angenommene Coordinatenkreuz mit dem Mittelpunkt M, so wäre offenbar

$$\frac{R}{b} = \cos \tau$$

d. h.

$$b = \frac{R}{\cos \tau}$$

und die Gleichung der Tangente TB wäre auf dieses Coordinatenkreuz bezogen:

$$y = \operatorname{tang} \tau . x + \frac{R}{\cos \tau} . \qquad \ldots . \; (10)$$

Gehen wir aber zu dem Coordinatenkreuz mit dem Mittelpunkt C zurück, so ist statt (10) die Gleichung:

$$(y - \beta) = \operatorname{tang} \tau \, (x - \alpha) + \frac{R}{\cos \tau}$$

zu setzen. Da aber $\alpha = x_0$ und $\beta = y_0$ (s. Gleichung (2) und (3)) sein muss, so folgt als Gleichung unserer gesuchten Fläche, welche die Gerade TB beschreibt, wenn sie an dem Schraubencylinder hingeführt wird:

$$(y-r.\cos 2m\pi z) = \operatorname{tang}\tau\,(x-r.\sin 2m\pi z) + \frac{R}{\cos\tau}\,. \quad \ldots. \;(11)$$

Denken wir ferner den Cylinder ursprünglich um einen Winkel W aus der Ruhelage gedreht, und von dieser Anfangslage aus um einen beliebigen Winkel w die Drehung fortgesetzt, so ist statt (11) zu setzen:

$$y-r\cos(2m\pi z+W+w) =$$

$$+\operatorname{tang}\tau.[x-r\sin(2m\pi z+W+w)]+\frac{R}{\cos\tau} \quad \ldots (12)$$

oder nach einer etwas andern Schreibweise:

$$[y-r\cos(2m\pi z+W+w)]\cos\tau -$$

$$-[x-r\sin(2m\pi z+W+w)]\sin\tau = R; \quad \ldots. \;(13)$$

und dieses ist die Gleichung der Fläche, welche die Gerade beschreibt, wenn sie an dem Schraubencylinder, dessen Gleichung (8) ist, hingleitet.

4. Wir wollen diese Fläche etwas näher kennen lernen. Zu dem Ende mögen zunächst ihre Durchschnitte mit der XZ und YZ Ebene bestimmt werden. Setzen wir, um die Gleichung für den Durchschnitt in der XZ Ebene zu bekommen, das y in der Gleichung (13) gleich Null, so ergiebt sich als verlangte Gleichung:

$$x = r\sin(2m\pi z+W+w) -$$

$$-r.\cos(2m\pi z+W+w)\frac{\cos\tau}{\sin\tau} - \frac{R}{\sin\tau} \quad \ldots. \;(14)$$

oder wenn wir den Anfangspunkt des Coordinatenkreuzes um die Strecke $\frac{R}{\sin\tau}$ auf der X Axe verlegen:

$$x = r\sin(2m\pi z+W+w) -$$

$$-r\cos(2m\pi z+W+w)\,\frac{\cos\tau}{\sin\tau}\,. \quad \ldots. \;(15)$$

Wir dürfen offenbar statt:

$$\sin(2m\pi z+W+w) \text{ und } \cos(2m\pi z+W+w)$$

ein

$$\sin 2m\pi(z+W+w) \text{ und } \cos 2m\pi(z+W+w)$$

schreiben, da ja W und w willkürliche Grössen sind, und, wenn derselbe Zweck erreicht werden sollte, bei der zweiten Schreibweise W und w nur den $\frac{1}{2m\pi}$ ten Theil von dem W und dem w bei der ersten Schreibweise zu betragen hätte. Beachten wir

ferner, dass es möglich ist, die beiden Summanden auf der rechten Seite von (15) in einen einzigen Summand von der Form

$$A . \sin 2m\pi (z + V + w)$$

zu verwandeln, falls nur die Constanten V und A gehörig gewählt werden, so ergiebt sich, dass die Gleichungen (14) oder (15) einer Sinuslinie mit der Schwingungszahl m angehören. Um ferner die Gleichung des Durchschnitts mit der YZ Ebene zu finden, setzen wir in (13) x gleich Null, um sofort

$$y = r \cos (2m\pi z + W + w) -$$

$$- r \sin (2m\pi z + W + w) \frac{\sin \tau}{\cos \tau} + \frac{R}{\cos \tau} \quad \ldots . (16)$$

als die gesuchte Gleichung zu haben. Auch sie gehört einer m fachen Sinuslinie an. Denn die beiden Glieder ausser $\frac{R}{\cos \tau}$ lassen sich in einen Sinus verwandeln und die Constante $\frac{R}{\cos \tau}$, welche noch übrig bleibt, kann durch Verlegung des Coordinatenkreuzes weggeschafft werden.

Wir sehen aber aus diesen Resultaten, dass die Fläche, welche von den, den Schraubencylinder tangirenden, Geraden beschrieben wird, eine m fache Sinus- oder Wellenfläche ist, deren erzeugende Gerade mit der XZ Ebene einen Winkel τ bildet. Nach der Wahl dieses Winkels τ werden sich die Gleichungen (13) bis (16) vereinfachen. Setzen wir z. B.

1° $\sin \tau = 0$, d. h. $\cos \tau = \pm 1$,

so folgt statt (13)

$$y - r \cos (2m\pi z + W + w) = \pm R$$

oder nach Verlegung des Coordinatenkreuzes um die Strecke $\pm R$

$$y = r \cos (2m\pi z + W + w) \quad \ldots . (17)$$

oder wenn man noch

$$W = 0 ; \quad w = 0$$

setzt:

$$y = r . \cos 2m\pi z . \quad \ldots . (18)$$

2° $\cos \tau = 0$, d. h. $\sin \tau = \pm 1$,

so folgt statt (13):

$$x = r . \sin (2m\pi z + W + w) \pm R$$

oder nach Versetzung des Coordinatenkreuzes

$$x = r \sin (2m\pi z + W + w) \quad \ldots . (19)$$

oder wenn man noch:

$$W = 0; \; w = 0$$

setzt:

$$x = r \sin 2m\pi z \qquad \ldots. \; (20)$$

Die doppelten Vorzeichen, welche eigentlich der Allgemeinheit wegen am $\cos \tau$ und $\sin \tau$ zu denken sind, deuten an, dass im Allgemeinen zwei Paar Sinusflächen entstehen, die sich dadurch unterscheiden, dass bei dem einen die erzeugende Gerade unter dem Winkel $+\tau$ bei dem andern aber dem Winkel $-\tau$ gegen die XZ Ebene geneigt ist. Ist τ weder 0 noch 90^0, so giebt es ja auch 4 Tangenten an einen Kreis, und wir haben vier Sinusflächen zu erwarten, von denen aber je zwei identisch werden, wenn $\tau = 0$ oder $\tau = 90^0$ wird.

5. Die Resultate, welche wir unter 2, 3, 4 gewonnen haben, deuten hinlänglich an, dass ein Schraubencylinder benutzt werden kann, um eine Wellenfläche zu erzeugen, und ihr eine fortschreitende Bewegung zu ertheilen. Am einfachsten wäre es natürlich, die Sache so einzurichten, dass die Wellenfläche die Gleichung (17) oder (19) erhielte, d. h. es so einzurichten, dass mit Rücksicht auf unsere Fig. 57, Taf. IV die Gerade TB in horizontaler oder in verticaler Lage den Kreis um M berührte. In welcher Weise dies in Wirklichkeit eingerichtet werden kann, bleibt dahin gestellt, da es keinerlei Schwierigkeiten unterliegt. Denkt man, es wäre TB ein Holzleistchen, worauf in der Mitte senkrecht ein Drath, oben mit einem Knöpfchen versehen, befestigt ist. Denkt man alle Holzleistchen der ganzen Wellenfläche so armirt, so leuchtet ein, wie bei dem Umdrehen des Schraubencylinders die Knöpfchen sich in einer ebenen fortschreitenden Wellenbewegung befinden.

6. Wir wollen eine zweite Aufgabe lösen, nämlich: welche Durchschnittscurve entsteht, wenn zwei verschiedene in angegebener Weise an einem und demselben Schraubencylinder erzeugte Wellenflächen jedoch mit derselben Wellenzahl sich durchschneiden?

Auflösung. Sind τ_1 und τ_2 die Neigungswinkel der beschreibenden Geraden, welche die Wellenflächen bilden, so ist die Durchschnittscurve dieser beiden Wellenflächen sofort gegeben durch das System der Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}[y-r\cos(2m\pi z+W+w)]\cos\tau_1 - \\ \quad -[x-r\sin(2m\pi z+W+w)]\sin\tau_1=R \\ {[y-r\cos(2m\pi z+W+w)]\cos\tau_2 -} \\ \quad -[x-r\sin(2m\pi z+W+w)]\sin\tau_2=R\,. \end{array}\right\} \ldots\ldots (21)$$

Eliminiren wir y aus diesen beiden Gleichungen, so folgt eine Gleichung zwischen x und z, nämlich:

$$[x-r\sin(2m\pi z+W+w)](\sin\tau_1\cos\tau_2-\cos\tau_1\sin\tau_2) \\ =R(\cos\tau_1-\cos\tau_2)$$

oder:

$$x=r\sin(2m\pi z+W+w)+\frac{R(\cos\tau_1-\cos\tau_2)}{\sin(\tau_1-\tau_2)} \quad \ldots\ldots (22)$$

als Projectionsgleichung der gesuchten Curve in der XZ Ebene. Eliminiren wir x, so ergiebt sich als Gleichung der Projection in der XZ Ebene:

$$y=r\cos(2m\pi z+W+w)+\frac{R(\sin\tau_1-\sin\tau_2)}{\sin(\tau_1-\tau_2)}. \quad \ldots\ldots (23)$$

Durch geeignete Wahl des Coordinatenkreuzes lassen sich die constanten Summanden in (22) und (23) wegschaffen und wir erhalten statt (22) und (23) die Gleichungen:

$$x=r\sin(2m\pi z+W+w) \quad \ldots\ldots (24)$$

$$y=r\cos(2m\pi z+W+w) \quad \ldots\ldots (25)$$

d. h. mit andern Worten, unsere gesuchte Durchschnittscurve ist eine gewöhnliche kreisförmige Schraubenlinie mit dem Radius gleich r, ein Resultat, was für alle Werthe von τ_1 und τ_2 giltig ist, mit alleiniger Ausnahme für $\tau_1=\tau_2$, wie sofort die Gleichungen (22) und (23) zeigen.

Dieses Resultat zeigt an, dass sich ein Apparat einrichten lässt, welcher *einen* Schraubencylinder besitzt und im Stande ist, eine *kreisförmige* fortschreitende Schraubenbewegung zu versinnlichen, und der, falls man die eine Wellenfläche ausser Thätigkeit setzt, auch im Stande ist, eine *ebene* fortschreitende Welle zu liefern.

7. Denken wir uns neben einem ersten Schraubencylinder einen zweiten, jedoch beide mit ihren Umdrehungsaxen zusammenfallend; denken wir, dass die Constanten bei dem einen wären:

$$r_1,\ R_1,\ \tau_1;\ W_1,\ m,$$

bei dem andern:

$$r_2,\ R_2,\ \tau_2,\ W_2,\ n,$$

dass ferner der eine variabele Drehungswinkel w_1, und der, dem zweiten Schraubencylinder in derselben Zeit entsprechende, variabele Drehungswinkel w_2 wäre, so beständen offenbar gemäss der Gleichung (13) die Gleichungen:

$$[y-r_1\cos(2m\pi z+W_1+w_1)]\cos\tau_1 -$$
$$-[x-r_1\sin(2m\pi z+W_1+w_1)]\sin\tau_1=R_1$$
$$[y-r_2\cos(2n\pi z+W_2+w_2)]\cos\tau_2 -$$
$$-[x-r_2\sin(2n\pi z+W_2+w_2)]\sin\tau_2=R_2$$

oder:

$$y\cos\tau_1-x\sin\tau_1-r_1\cos(2m\pi z+W_1+w_1+\tau_1)=R_1 \quad \ldots. (26)$$
$$y\cos\tau_2-x\sin\tau_2-r_2\cos(2n\pi z+W_2+w_2+\tau_2)=R_2 \quad \ldots. (27)$$

als Gleichungen zweier an den beiden Schraubencylindern entstandenen Tangentialflächen.

Unsere dritte Aufgabe soll sein, die Curve zu bestimmen, welche bei dem Durchschnitt der Flächen (26) und (27) entsteht. Zu dem Ende wollen wir einmal das y, das anderemal x eliminiren, um zunächst zu den Projectionsgleichungen der gesuchten Curve in der XZ und YZ Ebene zu gelangen.

Die Elimination von y und x ergiebt als die gesuchten Projectionsgleichungen:

$$x=r_2\cos(2n\pi z+W_2+w_2+\tau_2)\frac{\cos\tau_1}{\sin(\tau_1-\tau_2)}-$$
$$-r_1\cos(2m\pi z+W_1+w_1+\tau_1)\frac{\cos\tau_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)}+$$
$$+\frac{R_2\cos\tau_1-R_1\cos\tau_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)} \quad \ldots. (28)$$

$$y=r_2\cos(2n\pi z+W_2+w_2+\tau_2)\frac{\sin\tau_1}{\sin(\tau_1-\tau_2)}-$$
$$-r_1\cos(2m\pi z+W_1+w_1+\tau_1)\frac{\sin\tau_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)}+$$
$$+\frac{R_2\sin\tau_1-R_1\sin\tau_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)} \quad \ldots. (29)$$

Durch geeignete Verschiebung des Coordinatenkreuzes lassen sich die Constanten auf den rechten Seiten dieser Gleichungen wegschaffen. Nehmen wir ferner an, die Bewegung beider Schraubencylinder sei gleichförmig, also:

$$w_1=w_2=w$$

und setzen ferner noch:

$$W_2=0 \text{ und } W_1=W,$$

so gehen die Gleichungen (28) und (29) über in:

$$x=r_2\cos(2n\pi z+w+\tau_2)\frac{\cos\tau_1}{\sin(\tau_1-\tau_2)}-$$

$$-r_1\cos(2m\pi z+W+w+\tau_1)\frac{\cos\tau_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)}\ \ldots.\ (30)$$

$$y=r_2\cos(2n\pi z+w+\tau_2)\frac{\sin\tau_1}{\sin(\tau_1-\tau_2)}-$$

$$-r_1\cos(2m\pi z+W+w+\tau_1)\frac{\sin\tau_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)}\ \ldots.\ (31)$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn man dem τ_1 und τ_2 bestimmte Werthe beilegt. Ich will

$$\tau_1=0;\ \tau_2=90^0$$

annehmen. Statt (30) und (31) folgt dann:

$$x=r_2\sin(2n\pi z+w)$$
$$y=r_1\cos(2m\pi z+W+w).$$

Da ein Cosinus sich in einen Sinus verwandeln lässt, so können, wenn V dieser Verwandlung gemäss eine Constante bedeutet, statt der letzten beiden Gleichungen auch folgende

$$x=r_2\sin(2n\pi z+w)$$
$$y=r_1\sin(2m\pi z+V+w)$$

oder auch:

$$x=r_2\sin 2n\pi(z+w)$$
$$y=r_1\sin 2m\pi(z+V+w)$$

substituirt werden. Mit diesen Gleichungen haben wir hinlänglich Bekanntschaft gemacht; denken wir nämlich x mit y vertauscht, $r_1=A$; $r_2=B$ gesetzt, so ist:

$$x=A\sin 2m\pi(z+V+w)\ \ldots.\ (32)$$
$$y=B\sin 2n\pi(z+w)\ \ldots.\ (33)$$

d. h. die Gleichungen (32) und (33) sind vollständig identisch mit den Gleichungen (1) und (2) §. 37 als den Gleichungen, welche die Theorie des Fessel'schen Apparats enthielten, sobald nur noch statt V ein d, statt w ein t gesetzt wird.

Wir haben offenbar nicht nöthig, unsere Schraubencylinder mit den Axen der Z zusammenfallend zu denken, wir dürfen sie beliebig weit auseinander rücken, wenn nur die Axen der Z parallel bleiben. Die Durchschnittscurve der Wellenflächen (Tangentialflächen) kann ihre Form hierbei nicht ändern. Unter diesen Voraussetzungen aber liesse sich wirk-

lich ein Apparat mit Schraubencylindern construiren, welcher alle den zuletzt erhaltenen Gleichungen entsprechenden Erscheinungen lieferte. Der Apparat würde aus zwei Schraubencylindern derselben Länge, jedoch der eine mit m, der andere mit n Schraubengängen bestehen, welchen Cylindern durch Zahnräder oder Schleifriemen eine gleichförmige Drehung zu ertheilen wäre. An dem einen müssten, wenn man die Drehungsaxen horizontal denkt, die Leisten, welche die Drähte mit den Knöpfchen tragen, horizontal laufen, an diese Leisten dann verticale Leisten angeheftet sein, und letztere sich in verticaler Richtung an den zweiten Cylinder lehnen. Giebt man den Winkelleisten durch Schienen oder auch elastische Federn die geeignete Führung, so ist der Apparat fertig. Die Schraubencylinder besitzen den Anforderungen gemäss, der eine m, der andere n Windungen, und würde man also mehrere derselben anfertigen müssen, falls man eine grössere Mannigfaltigkeit von Erscheinungen erzielen wollte.

8. Zu dem vorausgehenden Resultate: dass man nämlich durch geeignete Wahl der Schraubencylinder alle Erscheinungen darstellen könne, welche sich aus den Gleichungen (32) und (33) theoretisch ableiten lassen, sind wir dadurch gelangt, dass wir zunächst in den allgemeinen Gleichungen (30) und (31) dem τ_1 und τ_2 bestimmte Werthe beilegten. Thun wir dies nicht, lassen wir τ_1 und τ_2 ganz willkürlich, so fragt es sich, welche Erscheinungen haben wir dann, den allgemeinen Gleichungen (30) und (31) nach, zu erwarten?

Setzen wir in den Gleichungen (30) und (31), was erlaubt ist:

$$-\cos(2m\pi z+W+w+\tau_1)=\sin(2m\pi z+W+w+\tau_1+270^0)$$

$$\cos(2n\pi z+w+\tau_2)=\sin(2n\pi z+w+\tau_2+90^0),$$

so sind sie identisch mit:

$$x=r_2\sin(2n\pi z+w+\tau_2+90^0)\frac{\cos\tau_1}{\sin(\tau_1-\tau_2)}+$$

$$+r_1\sin(2m\pi z+W+w+\tau_1+270^0)\frac{\cos\tau_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)}\quad\ldots.\ (34)$$

$$y=r_2\sin(2n\pi z+w+\tau_2+90^0)\frac{\sin\tau_1}{\sin(\tau_1-\tau_2)}+$$

$$+r_1\sin(2m\pi z+W+w+\tau_1+270^0)\frac{\sin\tau_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)}\quad\ldots.\ (35)$$

Denken wir w einen Augenblick als constant und setzen:

$$W+w+\tau_1+270^0=\vartheta_1$$
$$w+\tau_2+90^0=\vartheta_2$$
$$\frac{r_1}{\sin(\tau_1-\tau_2)}=A_1$$
$$\frac{r_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)}=A_2$$

so sind die letzten Gleichungen auch identisch mit:

$$x=A_1\sin(2m\pi z+\vartheta_1)\cos\tau_2+A_2\sin(2n\pi z+\vartheta_2)\cos\tau_1$$
$$y=A_1\sin(2m\pi z+\vartheta_1)\sin\tau_2+A_2\sin(2n\pi z+\vartheta_2)\sin\tau_1$$

oder da nach einer oben gemachten Bemerkung

$$\sin(2m\pi z+\vartheta_1)=\sin 2m\pi(z+\vartheta_1)$$
$$\sin(2n\pi z+\vartheta_2)=\sin 2n\pi(z+\vartheta_2)$$

gesetzt werden darf:

$$x=A_1\sin 2m\pi(z+\vartheta_1)\cos\tau_2+A_2\sin 2n\pi(z+\vartheta_2)\cos\tau_1 \quad \ldots.(36)$$
$$y=A_1\sin 2m\pi(z+\vartheta_1)\sin\tau_2+A_2\sin 2n\pi(z+\vartheta_2)\sin\tau_1 \quad \ldots.(37)$$

Denken wir ferner statt z ein t, statt τ_2 ein φ_1 und τ_1 ein φ_2 geschrieben, so sind diese letzten Gleichungen vollständig identisch mit den Fundamentalgleichungen ⊙ sobald in letztern noch

$$A_3=A_4=\ldots.0$$

angenommen wird. Da wir wissen, was diese Fundamentalgleichungen bedeuten, so können wir folgenden Satz mit Beziehung auf die Gleichungen (36) und (37) aussprechen:

»Setzen wir zwei beliebige Schraubencylinder mit ho- »rizontalen und parallelen Drehungsaxen voraus, construiren »wir an jedem eine Tangentialebene, dadurch, dass wir »an dem ersten eine Gerade parallel mit sich selbst und un- »ter einem Winkel τ_1, an dem zweiten eine Gerade parallel »mit sich selbst und unter einem Winkel τ_2 gegen den Hori- »zont gerichtet hinführen, erweitern wir diese Flächen, die »ich kurz schon als Tangentialflächen bezeichnet habe, bis »zum Durchschnitt mit einander, so stellt dieser Durchschnitt, »falls die Cylinder in demselben Sinne und gleichförmig ge- »dreht werden, in jedem Momente dieser Drehung eine »Schwingungscurve vor, welche auch unmittelbar dadurch »erzeugt werden könnte, dass zwei geradlinige Vibra- »tionscomponenten unter dem Winkel $(\tau_1-\tau_2)$, mit »den Schwingungszahlen n und m, sowie den Elon-

»gationsweiten $\frac{r_1}{\sin(\tau_1-\tau_2)}$ und $\frac{r_2}{\sin(\tau_1-\tau_2)}$ zusammen-
»wirkten, wenn nämlich r_1 und r_2 die Radien der kreis-
»förmigen Cylinder bedeuten, welche zunächst zur Erzeu-
»gung einer Schraubenlinie und weiter zur Construction der
»Schraubencylinder angenommen werden.«

9. Dieser Satz schliesst eine Reihe von Specialsätzen in sich ein. Ihm zu Folge stehen die Curven der Taf. V im genauesten Zusammenhange mit der räumlichen Resultante, welche durch einen nach meinen allgemeinen Principien construirten Wellenapparat erzeugt werden könnte, vorausgesetzt, dass

$$(\tau_1-\tau_2) \gtrless 90^0.$$

Es würden genau die auf der Taf. V gezeichneten Curven als Projection der räumlichen Curven in der *XY* Ebene auftreten, wenn:

$$(\tau_1-\tau_2) = 45^0$$

wäre. Es würden aber auch ferner die Curven der Taf. VI erscheinen, wenn:

$$(\tau_1-\tau_2) = 90^0$$

angenommen würde. Letzteres ist in der mannigfachsten Weise erreichbar, z. B. für:

$$\tau_1=90^0;\ \tau_2=0$$

oder:

$$\tau_1=60^0;\ \tau_2=-30^0$$

u. s. f.

Wir stehen hier an dem Punkte, wo sich am passendsten ein Uebergang auf den von Hrn. Geheime-Hofrath Gerling speciell zur Deutlichmachung der Polarisationsbewegungen der Aethertheilchen construirten Wellenapparat machen lässt. Der Apparat findet sich in Pogg. Ann. Bd. CV, S. 175 beschrieben und seiner Theorie nach vollkommen erläutert. Unsere Fig. 57 stellt an einer als beliebig anzusehenden Stelle einen Vertical-Durchschnitt durch die Schraubencylinder und die Tangentialflächen vor. C und $C_{,}$ sind die zu Punkten verkürzten, in Wirklichkeit als horizontal zu denkenden Drehungsaxen. Um diese herum sind kleinere Kreise gezogen, um die Cylinder anzudeuten, welche zunächst zur Erzeugung der beiden Schraubenlinien angenommen werden müssen.

Die grösseren Kreise, deren Mittelpunkt M und $M_{\prime}$ auf zwei bestimmten Stellen der Peripherien der kleinern angenommen sind, bedeuten die erzeugenden Kreise für die Schraubencylinder. AT und BT sind die an die grössern Kreise gelegten Tangenten, welche in dem GERLING'schen Apparat unter -45^0 und $+45^0$ gegen den Horizont, oder gegen die Gerade HH geneigt sind. Der Punkt T als Durchschnittspunkt der beiden Tangenten stellt einen Punkt der räumlichen Curve vor, welche bei dem Durchschnitt der Tangentialflächen gebildet wird. Denkt man die Gerade AB horizontal und fest mit den Tangenten AT und BT verbunden, so wird jeder Punkt, der auf den Geraden AB, BT, TA liegt, bei der Bewegung der Cylinder dieselbe Curve beschreiben, wie der Punkt T. Denkt man in der Mitte von AB eine senkrechte Gerade KTV fest mit der Geraden AB verbunden, so wird auch K dieselbe Bewegung machen wie T. Gefordert wird von den Geraden AT und TB, dass sie ihre Neigung gegen den Horizont nicht ändern, was durch die Einrichtung in dem GERLING'schen Apparat sehr nahe erreicht ist, und ich verweise in dieser Beziehung, sowie überhaupt, was die technische Einrichtung des Apparats betrifft, auf die soeben angeführte Abhandlung.

Also TB und AT sind beide unter 45^0 gegen HH geneigt und zwar TB unter $+45^0$ und AT unter -45^0. Nach der bisherigen Bezeichnung heisst dies also nichts weiter, als dass

$$\tau_1 = +45; \quad \tau_2 = -45^0$$

d. h.

$$(\tau_1 - \tau_2) = 90^0$$

zu setzen ist. Es treten aber noch Vereinfachungen der bisherigen, allgemeinere Erscheinungen anzeigenden, Gleichungen ein, falls man von ihr zu den speciellen Gleichungen für den GERLING'schen Apparat übergehen will. Diesem gemäss müssen wir nämlich auch noch:

$$r_1 = r_2 = r$$
$$m = n = 1,$$

ferner wie schon gesagt:

$$\tau_1 = +45$$
$$\tau_2 = -45^0$$

d. h.

$$\cos\tau_1 = \sin\tau_1 = +\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\tau_2 = +\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\tau_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

in den obigen Gleichungen (30) und (31) annehmen. Thun wir dies, so verwandeln sie sich bei einer etwas andern Anordnung in:

$$x = r.\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\cos(2\pi z + w - 45^0) - \cos(2\pi z + W + w + 45^0)\right\} \ldots. \quad (38)$$

$$y = r.\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\cos(2\pi z + w - 45^0) + \cos(2\pi z + W + w + 45^0)\right\} \ldots. \quad (39)$$

oder nach einer bekannten trigonometrischen Reductionsformel in:

$$x = r.\sqrt{2}.\sin\left(2\pi z + \frac{W}{2} + w\right).\sin\left(\frac{W}{2} + 45^0\right) \quad \ldots. \quad (40)$$

$$y = r.\sqrt{2}.\cos\left(2\pi z + \frac{W}{2} + w\right).\cos\left(\frac{W}{2} + 45^0\right), \quad \ldots. \quad (41)$$

welche Gleichungen vollständig identisch sind mit den Gleichungen (11) in der Gerling'schen Abhandlung, wenn man nur in letztern die Länge des Schraubengangs als 1 und den Radius des kleinen Kreises statt mit e mit r bezeichnet.

Wir wollen das Coordinatenkreuz der XY Ebene um einen Winkel $= 45^0$ herumgedreht denken und demgemäss:

$$x = x\sqrt{\frac{1}{2}} - y\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$y = x\sqrt{\frac{1}{2}} + y\sqrt{\frac{1}{2}}$$

in die letzten Gleichungen einführen. Bestimmen wir, sobald dies geschehen ist, wieder x und y, so ergiebt sich:

$$x = r.\left\{\sin\left(2\pi z + \frac{W}{2} + w\right)\sin\left(\frac{W}{2} + 45^0\right) + \right.$$
$$\left. + \cos\left(2\pi z + \frac{W}{2} + w\right)\cos\left(\frac{W}{2} + 45^0\right)\right\}$$

$$y = r.\left\{\cos\left(2\pi z + \frac{W}{2} + w\right)\cos\left(\frac{W}{2} + 45^0\right) - \right.$$
$$\left. - \sin\left(2\pi z + \frac{W}{2} + w\right).\sin\left(\frac{W}{2} + 45^0\right)\right\}$$

oder:

$$x = r \cdot \cos(2\pi z + w - 45^0)$$
$$y = r \cdot \cos(2\pi z + W + w + 45^0)$$

oder:

$$x = r \cdot \sin(2\pi z + w + 45^0)$$
$$y = r \cdot \sin(2\pi z + W + w + 45^0 + 90^0)$$

oder:

$$\arcsin \frac{x}{r} = 2\pi z + w + 45^0$$

$$\arcsin \frac{y}{r} = 2\pi z + W + w + 45 + 90^0$$

oder, bei der Elimination von w:

$$\arcsin \frac{y}{r} - \arcsin \frac{x}{r} = W + 90^0.$$

Multipliciren wir beide Seiten mit (-1), schreiben wir für x ein y, ferner für r ein A und bezeichnen kurz $W+90$ mit $+2\pi d$, so folgt zunächst:

$$-\arcsin \frac{x}{A} + \arcsin \frac{y}{A} = -2\pi d$$

oder:

$$\arcsin \frac{y}{A} = \arcsin \frac{x}{A} - 2\pi d$$

oder:

$$y = A \sin \left\{ \arcsin \frac{x}{A} - 2\pi d \right\}$$

oder:

$$y = x \cos 2\pi d - \sqrt{A^2 - x^2} \cdot \sin 2\pi d \ldots.$$

eine Gleichung, welche mit der Gleichung (11) des vorigen §. vollständig übereinstimmt, wenn man in letzterer noch $A = B$ annimmt. Daraus folgt aber: dass die Discussion der Gleichungen (40) und (41) zu keinen andern Resultaten führen würde, als die der Gleichung (11) des vorigen §. Letztere bezog sich auf den Fall, wo ganz gleiche Wellenleisten des Fessel'schen Apparats nach derselben Seite hin verschoben werden. Desgleichen beziehen sich die Gleichungen (40) und (41) nur auf zwei ganz gleiche Schraubencylinder, welche beide gleichförmig und in derselben Richtung gedreht werden. Eine weitere Discussion an die Gleichungen (40) und (41) anzuknüpfen, ist nicht nöthig, da in der Abhandlung von Gerling dieselbe vollständig durchgeführt ist.

10. Es können auch die Fälle eintreten, dass man zwei

beliebige Schraubencylinder mit m und n Schraubengängen in umgekehrtem Sinne jedoch gleichförmig dreht. Fragen wir nach der Curve, welche nunmehr die Tangentialflächen als Durchschnitt liefern, so erhalten wir deren Gleichungen sofort, wenn wir in den Gleichungen (26) und (27) statt

$$w_1 \text{ ein } \pm w \text{ statt } w_2 \text{ ein } \mp w$$

einsetzen. Um sofort einen einfachen und durch den GERLING'-schen Apparat zu erläuternden Fall anzunehmen, will ich voraussetzen, es wäre in den Gleichungen (26) und (27):

$$W_2=0;\ W_1=W$$
$$\tau_1=+45^0$$
$$\tau_2=-45^0$$
$$R_1=R_2=R$$
$$r_1=r_2=r\,.$$

Dies angenommen, folgt statt der genannten Gleichungen:

$$y\sqrt{\frac{1}{2}}-x\sqrt{\frac{1}{2}}-r\cos\left(2\pi z+W\pm w+45^0\right)=R$$

$$y\sqrt{\frac{1}{2}}+x\sqrt{\frac{1}{2}}-r\cos\left(2\pi z\mp w-45^0\right)=R$$

oder bei der Reduction auf x und y, sowie geeigneter Veränderung des Coordinatenkreuzes:

$$x=r\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(2\pi z\mp w-45^0\right)-\cos\left(2\pi z+W\pm w+45^0\right)\right\}$$

$$y=r\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(2\pi z\mp w-45^0\right)+\cos\left(2\pi z+W\pm w+45^0\right)\right\}$$

oder:

$$x=r\sqrt{2}.\sin\left(2\pi z+\frac{W}{2}\right)\sin\left(\frac{W}{2}\pm w+45^0\right) \qquad \ldots.\ (42)$$

$$y=r\sqrt{2}.\cos\left(2\pi z+\frac{W}{2}\right)\cos\left(\frac{W}{2}\pm w+45^0\right) \qquad \ldots.\ (43)$$

welche Gleichungen vollständig identisch sind mit den Gleichungen (19) in der GERLING'schen Abhandlung. Drehen wir wiederum das Coordinatenkreuz der XY Ebene um einen Winkel gleich 45^0, so folgt statt der letzten Gleichungen:

$$x\sqrt{\frac{1}{2}}-y\sqrt{\frac{1}{2}}=r.\sqrt{2}.\sin\left(2\pi z+\frac{W}{2}\right)\sin\left(\frac{W}{2}\pm w+45^0\right)$$

$$x\sqrt{\frac{1}{2}}+y\sqrt{\frac{1}{2}}=r.\sqrt{2}.\cos\left(2\pi z+\frac{W}{2}\right)\cos\left(\frac{W}{2}\pm w+45^0\right)$$

mithin:

$$x = r\{\cos(2\pi z \mp w - 45^0)\}$$
$$y = r\{\cos(2\pi z + W \pm w + 45^0)\}$$

oder:

$$x = r\{\sin(2\pi z \mp w - 45 + 90^0)\}$$
$$y = r\{\sin(2\pi z + W \pm w + 45^0 + 90^0)\}$$

mithin:

$$\arcsin\frac{x}{r} = 2\pi z \mp w - 45^0 + 90^0$$
$$\arcsin\frac{y}{r} = 2\pi z + W \pm w + 45^0 + 90^0$$

mithin:

$$\arcsin\frac{x}{r} - \arcsin\frac{y}{r} = \mp 2w - W - 90^0$$
$$= \mp 2w - (W + 90^0)$$

oder wenn man

$$w = t$$
$$W + 90^0 = d$$

setzt:

$$\arcsin\frac{x}{r} - \arcsin\frac{y}{r} = \mp 2t - d$$

oder wenn man mit (-1) beiderseits multiplicirt und für x ein y schreibt:

$$\arcsin\frac{x}{r} - \arcsin\frac{y}{r} = \pm 2t + d,$$

eine Gleichung, welche vollständig identisch ist mit der Gleichung (16) des vorigen §, wenn man in letzterm noch $A = B = r$ und $m = n = 1$ annimmt.

11. Wir haben bis jetzt immer nur vorausgesetzt, dass die Schrauben in gleichem Sinne gewunden, also nur links oder rechts gewunden seien. Sieht man von dieser Gleichheit ab, setzt man einen rechts und einen links gewundenen Schraubencylinder gleichzeitig voraus, so ist nur nöthig, wenn man auf die hierdurch auftretenden Unterschiede näher eingehen wollte, die Gleichungen für die Schraubenlinien, welche wir oben als

$$x_0 = r \,.\, \sin 2m\pi z$$
$$y_0 = r \,.\, \cos 2m\pi z$$

voraussetzten, als

$$x_0 = \pm r \,.\, \sin 2m\pi z$$
$$y_0 = r \,.\, \cos 2m\pi z$$

anzunehmen, wo sich das + auf den einen, das — auf den andern Schraubencylinder bezieht. Es werden sich die Gleichungen im weitern Verlaufe dann mit Rücksicht auf die beiden Zeichen des x_0 etwas ändern, ohne jedoch vom Obigen wesentlich Abweichendes zu liefern.

12. Noch einen Fall möchte ich erwähnen, nämlich was entsteht, wenn wir zwei Schraubencylinder mit ungleicher Geschwindigkeit drehen? Beschränkt man diese Frage auf zwei ganz gleiche Schraubencylinder, so hätte man zunächst nöthig, in den Gleichungen (26) und (27), vorausgesetzt, dass die Drehung nach derselben Seite geht:

$$w_1 = p.w$$
$$w_2 = q.w$$
$$m = n = 1$$
$$r_1 = r_2 = r$$
$$R_1 = R_2 = R$$

zu setzen. Nehmen wir ausserdem noch

$$W_2 = 0$$
$$W_1 = W$$

an, ferner:

$$\tau_1 = +45; \quad \tau_2 = -45^0$$

so folgt statt (26) und (27), wenn man rechts R gleich weglässt:

$$y\sqrt{\frac{1}{2}} - x\sqrt{\frac{1}{2}} = r.\cos(2\pi z + W + p.w + 45^0)$$

$$y\sqrt{\frac{1}{2}} + x\sqrt{\frac{1}{2}} = r.\cos(2\pi z + q.w - 45^0)$$

oder:

$$x = r\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\cos(2\pi z + q.w - 45^0) - \cos(2\pi z + W + p.w + 45^0)\right\}$$

$$y = r\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\cos(2\pi z + q.w - 45^0) + \cos(2\pi z + W + p.w + 45^0)\right\}$$

oder:

$$x = r\sqrt{2}.\sin\left(2\pi z + \frac{p+q}{2}.w + \frac{W}{2}\right)$$
$$.\sin\left(\frac{W}{2} + \frac{p-q}{2}.w + 45^0\right) \quad \ldots. \ (44)$$

$$y = r\sqrt{2}.\cos\left(2\pi z + \frac{p+q}{2}.w + \frac{W}{2}\right)$$
$$.\cos\left(\frac{W}{2} + \frac{p-q}{2}.w + 45^0\right) \quad \ldots. \ (45)$$

Wir wollen zunächst nicht das Coordinatenkreuz der XY Ebene um 45^0 drehen, sondern diese letzten Gleichungen unmittelbar benutzen. Eliminiren wir z, so folgt:

$$\frac{x^2}{2r^2 \sin\left(\frac{W}{2}+\frac{p-q}{2}.w+45^0\right)^2}+\frac{y^2}{2r^2 \cos\left(\frac{W}{2}+\frac{p-q}{2}.w+45^0\right)^2}=1. \quad \ldots. (46)$$

Eliminiren wir aus den Gleichungen (42) und (43) das z, so folgt, wenn wir nur das obere Zeichen am w berücksichtigen:

$$\frac{x^2}{2r^2 \sin\left(\frac{W}{2}+w+45^0\right)^2}+\frac{y^2}{2r^2 .\cos\left(\frac{W}{2}+w+45^0\right)^2}=1 \quad \ldots. (47)$$

und vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung (46), so sehen wir, dass beide identisch werden, sobald

$$\frac{p-q}{2}=1$$

d. h. wenn p und q als kleinste Zahlen vorausgesetzt werden, sobald

$$p=(2K+1)\,;\; q=2K-1$$

angenommen wird. Daraus ergiebt sich das folgende nicht uninteressante Resultat:

»Dreht man zwei ganz **gleiche** Schraubencylinder mit »**ungleicher** Geschwindigkeit, aber doch in **demselben** »Sinne, so erzeugen die Tangentialflächen eine räumliche Durch»schnittscurve, deren Projection in der XY Ebene durch die »Gleichung (46) gegeben ist; wird aber die Drehung so ein»gerichtet, dass sie bei dem einen Cylinder $2K+1$ mal er»folgt und in derselben Zeit bei dem andern $2K-1$ mal, so ist »diese Projection dieselbe, als wenn man zwei ganz gleiche »Cylinder gleichförmig, aber in entgegengesetzter Richtung »drehte, und die, bei dem Durchschnitt der Tangentialflächen »entstehende, räumliche Curve auf die XY Ebene projicirte.«

In dem Gerling'schen Apparate würde sich dieses Resultat leicht veranschaulichen lassen, wenn man durch geeignete

Zahnräder oder Schleifriemen dem einen Schraubencylinder z. B. eine dreimal grössere Geschwindigkeit gäbe wie dem andern.

Wir wollen nun bei den Gleichungen (44) und (45) das Coordinatenkreuz der XY Ebene um 45^0 drehen. Die Gleichungen verwandeln sich hierdurch in:

$$x\sqrt{\frac{1}{2}} - y\sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= r \,.\, \sqrt{2} \,.\, \sin\left(2\pi z + \frac{p+q}{2} \,.\, w + \frac{W}{2}\right) \,.\, \sin\left(\frac{W}{2} + \frac{p-q}{2} w + 45^0\right)$$

$$x\sqrt{\frac{1}{2}} + y\sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= r \,.\, \sqrt{2} \,.\, \cos\left(2\pi z + \frac{p+q}{2} \,.\, w + \frac{W}{2}\right) \,.\, \cos\left(\frac{W}{2} + \frac{p-q}{2} w + 45^0\right)$$

oder:

$$x = r \,.\, \cos\,(2\pi z + q.w - 45^0)$$
$$y = r \,.\, \cos\,(2\pi z + p.w + W + 45^0)$$

oder:

$$x = r \,.\, \sin\,(2\pi z + q.w - 45^0 + 90)^0$$
$$y = r \,.\, \sin\,(2\pi z + p.w + W + 45^0 + 90^0).$$

Rechnen wir, was erlaubt ist, dem x allein eine Phasendifferenz zu und bezeichnen diese mit d, so folgt:

$$x = r \,.\, \sin\,(2\pi z + q.w + d)$$
$$y = r \,.\, \sin\,(2\pi z + p.w).$$

Nehmen wir z als constant und gleich a an, so folgt:

$$x = r \,.\, \sin\,(2\pi a + q.w + d)$$
$$y = r \,.\, \sin\,(2\pi a + p.w)$$

oder wenn man die Phasendifferenz von y wieder nach x verlegt und letztere mit ϑ bezeichnet:

$$x = r \,.\, \sin\,(q.w + \vartheta)$$
$$y = r \,.\, \sin p.w$$

oder wenn wir

$$w = 2\pi w$$
$$\vartheta = \frac{\vartheta}{2q\pi}$$

annehmen:

$$x = r \,.\, \sin 2\pi q\,(w + \vartheta)$$
$$y = r \,.\, \sin 2\pi p w$$

oder wenn[1]

$$q = m;\; p = n$$

angenommen wird:

$$x = r \,.\, \sin 2m\pi (w + \vartheta)$$
$$y = r \,.\, \sin 2n\pi w$$

Gleichungen, welche mit den Gleichungen I_a vollständig übereinstimmen, falls man nur dort $A = B = r$ und $t = w$ setzte. Daraus folgt aber:

»Wenn man bei dem GERLING'schen Apparate, wo zwei »Schraubencylinder mit gleicher Anzahl von Schrauben»gängen angewandt werden, mittelst Schleifriemen oder »Zahnrädern die Sache so einrichtet, dass der eine Schrau»bencylinder m, der andere n Umdrehungen macht, so be»schreibt jedes Knöpfchen eine Curve der Taf. VI, voraus»gesetzt jedoch, dass wir den beiden Vibrationscomponenten »der letztern Curven noch gleiche Elongationtionsweiten zu»rechnen.«

Es versteht sich von selbst, dass man noch eine Reihe von Sätzen auffinden könnte, falls man die Aufgabe allgemeiner lösen wollte und annähme, zwei beliebige Schraubencylinder bewegten sich mit ungleicher Geschwindigkeit. Doch liegt es nicht in meiner Absicht, dieses Thema weiter zu behandeln, und obwohl im Einzelnen die Ausführungen nicht alle gemacht wurden, so werden die Resultate, welche in diesem Capitel gewonnen wurden, der Hauptsache nach folgende sein:

»1°. Bei denjenigen Wellenapparaten, welche nur in »derselben Ebene gelegene Wellen combiniren, ist die re»sultirende Wellencurve eine Sinuslinie »erster,« »zweiter,« »dritter« etc. Ordnung und ihre Projection auf eine in der »Ebene der Curve und parallel den Coordinaten gelegene »Gerade stellt genau den Vorgang dar, wie er zu denken »ist, wenn »eine,« »zwei,« »drei« etc. Vibrationscomponenten »in derselben Geraden gleichzeitig einen Punkt angreifen.

»2°. Bei denjenigen Wellenapparaten, welche zwei, un»ter einem Winkel gegen einander geneigte ebene Wellen »combiniren, entsteht im Allgemeinen eine räumliche Resul»tante. Bewegen sich die Componenten, so bewegt sich auch »letztere und beschreibt hierbei eine Fläche, welche an ir»gend einer Stelle durchschnitten eine Curve liefert, dersel»ben Art, wie wir sie als Schwingungscurven kennen lernten.

»3°. Diese Durchschnittscurve ist diejenige, in welcher

»sich der, der Durchschnittsstelle entsprechende Punkt bei »der Drehung bewegt, und die Schwingungszahlen, sowie »andere bei den Schraubencylindern und ihrer Bewegung »angenommene Constanten, finden sich bei der Bewegungs- »curve der einzelnen Punkte genau wieder.

»4°. Die verschiedenen Schwingungszahlen kann man »herausbringen durch eine Anzahl verschiedener Schrau- »bencylinder oder Wellenleisten; aber auch dadurch, dass »man zwei Schraubencylinder oder Wellenleisten, welche »die nämliche Anzahl von Schraubengängen, beziehungs- »weise Wellenlängen besitzen, mit ungleicher Geschwin- »digkeit dreht oder verschiebt.«

Was die Theorie der Curven auf Taf. VI anlangt, so muss ich zum Schlusse noch auf eine interessante Arbeit des Herrn Lippich in den Abhandlungen der Wiener Academie Bd. XX hinweisen, welche mir während des Drucks gegenwärtiger Schrift zu Gesicht kam und worin der Verfasser, von Grundsätzen der Mechanik ausgehend, einzelne Erscheinungen bei schwingenden Stäben ableitet, insofern sich diese auf die Curven der Taf. VI beziehen. Es scheint jedoch dem Verfasser der genannten Arbeit die kleine, von mir in Pogg. Ann. Bd. 115 (1861) S. 117 veröffentlichte Abhandlung über das Universalkaleidophon entgangen zu sein, da er seiner Abhandlung die Beschreibung und Zeichnung eines Apparats hinzufügt, den ich bereits in fast derselben Form angegeben hatte.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

